

ABSTRAK

PENGUKURAN SIFAT-SIFAT SPEKTRAL GELOMBANG TELUK RATAI

Teluk Ratai adalah Teluk di Lampung Selatan yang cukup strategis letaknya. Oleh Karena itu pengetahuan tentang karakteristik gelombangnya perlu diketahui. Hal ini dilakukan karena laut mengandung bahaya. Bahaya yang terbesar adalah bila energi yang ditimbulkan oleh gelombang laut merusakkan kapal atau secara kontinyu melemahkan bangunan-bangunan di pantai atau di lepas pantai. Karenanya distribusi energi gelombang laut perlu dipelajari untuk memperkecil kemungkinan bahaya yang disebabkan gelombang laut.

Gelombang laut merupakan proses yang random dan kontinyu. Selain itu penuh ketidakaturan dan ketidakpastian serta kompleks. Untuk memudahkan identifikasi adalah dengan membentuk gelombang ideal yaitu gelombang sinusoidal. Sedangkan satu-satunya cara untuk memperhitungkan ketidakaturannya adalah dengan menentukan total energi, yang berbanding langsung dengan kuadrat amplitudonya.

Untuk menggambarkan distribusi energi gelombang digunakan analisis spektral 'frequency domain'. Gagasan analisis ini didasarkan pada deret Fourier dan dikembangkan dengan teori Wiener, 'Generalized Harmonic Process', untuk menghitung total energi dari proses. Akan tetapi karena dalam keadaan 'steady-state' total energi proses dari $t=-\infty$ sampai $t=\infty$ menjadi tak terhingga maka perhatian dialihkan pada 'power' daripada kepada energi, yaitu walaupun kontribusi total energi mendekati tak terhingga bila $T \rightarrow \infty$, 'power' yang dikontribusi oleh berbagai komponen akan konvergen.

Pencatatan tinggi gelombang dilakukan pada bulan Oktober 1987 pada kedalaman 10 sampai 15 meter, tiap 3 jam selama 10 menit. Dengan interval waktu 1 menit, proses yang kontinyu dirubah menjadi proses diskret dan didapatkan 2000 data.

Setelah data memenuhi syarat stasioner, dengan algoritma 'Fast Fourier Transform' didapatkan periodogram. Smoothing periodogram menghasilkan spektrum atau energi sebagai fungsi frekuensi. Distribusi gelombang Teluk Ratai terpusat pada frekuensi yang rendah atau dengan kata lain periode dan panjang gelombangnya besar sekali. Kesimpulan ini berlaku hanya untuk lokasi tersebut dan pada waktu tersebut. Karena ini merupakan studi awal, nilai serta besaran yang didapatkan masih merupakan informasi awal.

Dwi Retnani Tjahjaningtyas
1851300100

Surabaya, Maret 1990

Mengetahui / Menyetujui

Dosen Pembimbing II

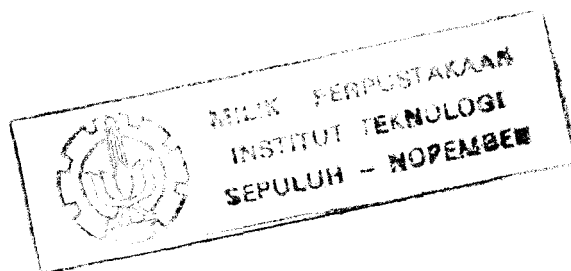


(Ir. Asjhar Imron, M.Sc MSE. PED.)

Dosen Pembimbing I



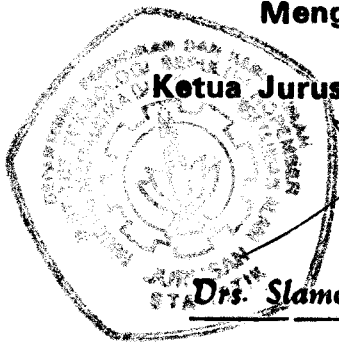
(Drs. Kresnayana Yahya, M.Sc)



Surabaya, Maret 1990

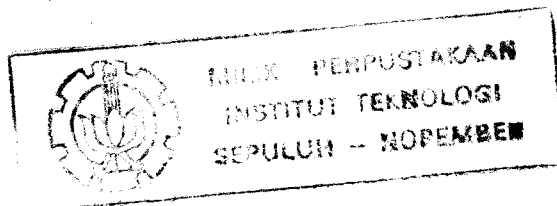
Mengetahui / Menyetujui

Ketua Jurusan Statistika FMIPA - ITS



Drs. Slamet Mulyono, M.Sc. Ph.D

Nip. 130 520 312



BAB II

GELOMBANG LAUT

2.1 TIMBULNYA GELOMBANG LAUT

Gelombang air sebenarnya adalah gerak osilasi air. Gerak tersebut nampak sebagai perubahan bentuk yang bergerak ke arah luar dari permukaan air. Gelombang selalu menimbulkan sebuah ayunan air yang bergerak tak henti-hentinya pada lapisan permukaan air.

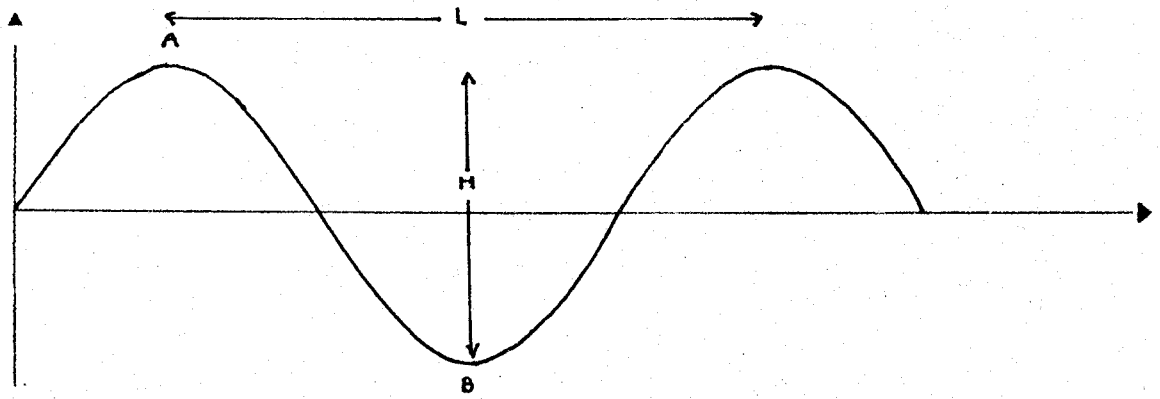
Gangguan pada permukaan air adalah penyebab terjadinya gelombang. Selain itu juga karena efek gravitasi bumi. Secara visual, gelombang seolah-olah bergerak horizontal dari satu tempat ke tempat lain. Namun kenyataannya, yang bergerak ke arah depan adalah massa air itu sendiri. Pada daerah, dimana gangguan terjadi, air terdesak ke bawah. Terbentuk suatu ruangan yang disebabkan oleh daya angkat air di sekitar pusat gangguan. Karena efek gravitasi bumi, lingkaran air yang terangkat jatuh lagi dan berat airnya mendorong air ke bawah dan menyebabkan lingkaran besar di sekitar pusat gangguan. Bila proses ini berlangsung terus, permukaan air yang terangkat terus menerus berjalan ke arah luar. Pada saat terjadi gelombang, massa air yang timbul disebarkan. Oleh karena itu semakin jauh dari pusat gangguan, gelombang yang terjadi semakin kecil.

Satu pusat gangguan bukan hanya menghasilkan satu ge-

lombang saja. Sebab, bila terbentuk daerah air yang naik, tidak mendorong air ke arah luar saja, tetapi juga ke arah dalam dan menghasilkan gelombang kedua yang berjalan ke arah luar. Tetapi setiap gelombang selanjutnya selalu lebih rendah daripada sebelumnya, karena setiap air naik dan turun menyebabkan pemakaian energi karena gesekan dalam air dan menghasilkan panas. Akhirnya gelombang akan habis dan permukaan air rata kembali, tetapi suhu meningkat.

Gerakan partikel-partikel air dalam gelombang, bila dapat ditandai, terlihat naik dan turun. Tetapi sebenarnya gerakannya lebih kompleks. Gerakan tersebut adalah suatu gerakan yang membentuk sebuah lingkaran bulat. Partikel-partikel yang terangkat ke atas akan membentuk setengah lingkaran dan sampai di tempat tertinggi, kemudian partikel-partikel tersebut akan dibawa ke bawah membentuk lingkaran penuh, melewati tempat yang paling bawah (gambar 2.2). Gelombang-gelombang yang terjadi hanyalah sebatas bagian lapisan permukaan air yang letaknya paling atas. Didalam satu gelombang, gerakan partikel-partikel akan berkurang makin lama makin lambat sesuai dengan makin dalamnya suatu perairan, yang mengakibatkan bentuk lingkaran makin lama makin kecil.

Di lautan, gelombang yang terjadi adalah tidak teratur dan amat kompleks. Namun untuk memudahkan penelitian dan menentukan bagian-bagian gelombang dilakukan penyederhanaan dengan membentuk gelombang laut ideal yang merupakan gelombang sinusoidal.



Gambar 2.1 Bentuk gelombang laut ideal dengan bagiannya :

- (A) Puncak gelombang (crest)
- (B) Lembah gelombang (trough)
- (H) Tinggi gelombang (wave height)
- (L) Panjang gelombang (wave length)

2.2 PENYEBAB GELOMBANG LAUT

Di lautan yang meliputi wilayah air yang luas dan bebas, penyebab terjadinya gelombang laut ada bermacam-macam. Gelombang yang disebabkan oleh gaya tarik bulan dan efek matahari dikenal sebagai pasang. Jarak antara pasang tertinggi dan terendah diukur dalam ribuan kilometer, karena meliputi satu benua ke benua lain. Bentuk gelombang lain adalah yang disebabkan oleh gempa bumi dasar laut dan disebut Tsunamis. Panjang gelombang jenis ini dapat mencapai ratusan kilometer. Akan tetapi penyebab utama gelombang laut yang senantiasa terjadi adalah angin yang berhembus di atas permukaan laut.

Panjang gelombang yang terjadi bervariasi dari ribuan kilometer sampai satuan sentimeter yang disebut gelombang kapiler.

Angin terjadi karena ada perbedaan tekanan udara yang merupakan hasil dari pengaruh ketidakseimbangan pemanasan sinar matahari terhadap tempat-tempat yang berbeda di permukaan bumi. Seluruh permukaan bumi dibagi menjadi beberapa daerah utama yang mempunyai tekanan udara yang tergantung pada letak lintang. Hal ini menyebabkan timbulnya tiga sistem angin utama yang mempunyai arah tertentu. Juga terdapat sifat angin lain di daerah-daerah pertemuan sistem angin. Namun demikian terdapat perbedaan sifat-sifat angin di setiap wilayah karena juga dipengaruhi faktor-faktor setempat. Selain itu musim juga mempengaruhi.

Di setiap wilayah, kecepatan angin berubah-ubah setiap waktu, juga bentuk, intensitas serta arahnya. Adapun kekuatan angin merupakan fungsi dari berat udara, gaya gravitasi bumi, kecepatan, luas daerah, koefisien 'drag' atau 'lift'. Tentang timbulnya gelombang oleh angin, ada 3 teori yang berbeda. Namun semua sependapat bahwa transfer energi angin kepada lautanlah yang menyebabkan timbulnya gelombang laut.

Adanya karakteristik angin yang tidak tentu menyebabkan bentuk gelombang laut cenderung tidak tentu juga. Bentuk gelombang laut tergantung pada sifat-sifat gelombang itu sendiri seperti tinggi, periode, di daerah mana mereka dibentuk. Sifat-sifat gelombang itu sendiri paling tidak dipengaruhi oleh tiga unsur angin, yaitu :

1. Kecepatan angin

Makin kencang angin bertiup, gelombang yang terbentuk makin besar, kecepatannya tinggi dan panjang gelombangnya besar. Puncaknya biasanya kurang curam dibandingkan dengan yang ditimbulkan oleh kecepatan angin yang lemah.

2. Waktu dimana angin sedang bertiup

Bila waktu angin pembangkit gelombang meningkat maka tinggi, kecepatan dan panjang gelombang cenderung meningkat.

3. Jarak tanpa rintangan dimana angin sedang bertiup (fetch)

Panjang gelombang yang terbentuk pada kolom air yang relatif kecil, misalnya danau, yang 'fetch'-nya kecil, lebih kecil dibanding dengan yang terbentuk pada kolom air yang 'fetch'-nya besar, misalnya lautan bebas.

Untuk tujuan praktis, guna mengetahui gambaran kasar gelombang laut yang terjadi dari kecepatan angin yang bertiup dibentuk Skala Beaufort.

2.3 JENIS-JENIS GELOMBANG LAUT

Klasifikasi atau penamaan bentuk gelombang laut dilakukan dari berbagai segi.

Untuk gelombang secara konseptual ada 2 bentuk, yaitu :

1. Gelombang Sinusoidal

Gelombang sebagaimana dalam gambar 2.1. Mempunyai puncak dan lembah yang simetris.

2. Gelombang Trochoidal

Gelombang ini mempunyai bentuk puncak yang sempit, tajam dan lembah yang lebar dan gemuk (gambar 2.3).

Sedang bila ditinjau dari gerak horisontal, profil gelombang dibagi menjadi dua :

1. Gelombang progreif (Progressiive wava)

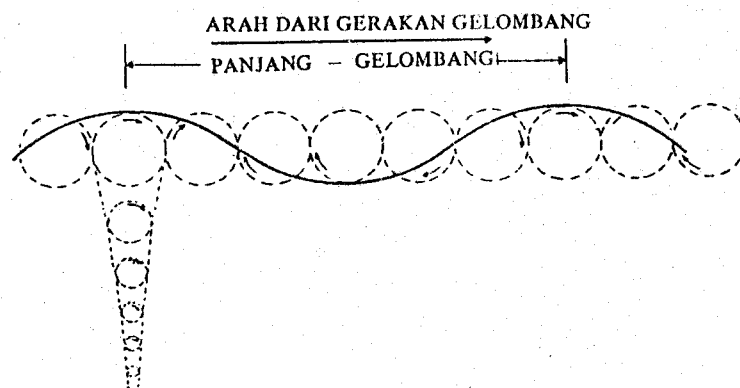
Profil gelombang di permukaan air, berjalan secara horisontal.

2. Standing wave

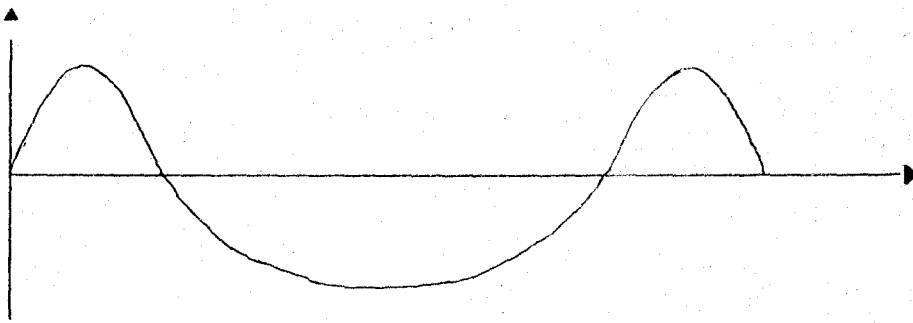
Profil gelombang berosilasi naik dan turun di suatu tempat dan tidak bergerak secara melintang.

Gelombang yang ditimbulkan oleh angin ada 2 jenis (gambar 2.4a dan 2.4b):

1. Sea, gelombang dimana angin membentuknya.
2. Swell, gelombang yang tidak dipengaruhi langsung oleh angin sehingga bentuknya lebih teratur.

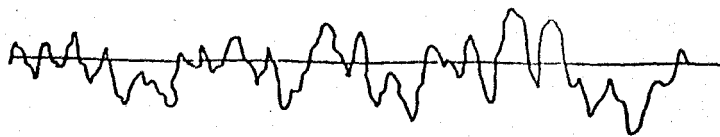


Gambar 2.2 Bentuk sebuah gelombang dan diagram gerakan partikel-partikel air yang ada dalam gelombang.

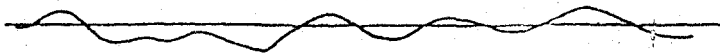


Gambar 2.3 Gelombang Trochoidal

(a)



(b)



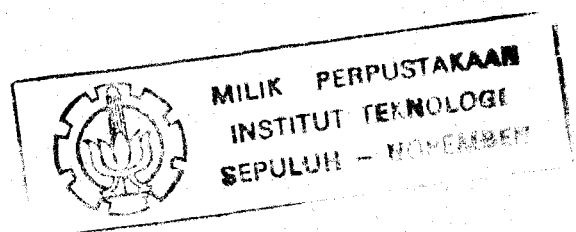
Gambar 2.4 : (a) Sea

(b) Swell

2.4 IDENTIFIKASI VARIABEL-VARIABEL

Pengetahuan tentang gelombang laut membawa pada suatu kenyataan bahwa gelombang laut merupakan proses yang random dan sifat-sifat gelombang laut merupakan variabel random. Unsur-unsur yang menyebabkannya disebut demikian adalah :

- Puncak gelombang : Titik dimana permukaan air mencapai tempat tertinggi.
- Lembah gelombang : Titik dimana permukaan air mencapai tempat yang paling rendah.
- Tinggi gelombang : Jarak vertikal puncak dan lembah gelombang.
- Panjang gelombang : Jarak dari satu puncak ke puncak berikutnya atau dari satu lembah ke lembah berikutnya.
- Periode gelombang : Waktu yang diperlukan dua puncak gelombang berturut-turut (atau lembah gelombang) untuk melewati suatu titik di permukaan air.
- Frekuensi gelombang : Banyaknya puncak (lembah) yang melalui suatu titik dalam satuan detik.



BAB III

ANALISIS SPEKTRAL

Gerak osilasi secara umum merupakan gerak harmonik. Karena kompleksnya, gerak osilasi disederhanakan sehingga demikian juga gerak harmonik yang kemudian menjadi gerak harmonik sederhana. Gerak ini digambarkan sebagai proyeksi - titik yang bergerak mengelilingi lingkaran dengan kecepatan yang konstan - pada diameter lingkaran. Dan bila diproyeksikan pada grafik dua dimensi maka tampak sebagai gerak gelombang. Phenomena semacam gelombang merupakan komposisi gelombang sinus dan kosinus lazim disebut gelombang sinusoidal, dapat dihubungkan dengan konsep frekuensi.

Analisis Spektral adalah analisis statistik inferens yang berdasarkan konsep frekuensi, yang secara visual digambarkan dengan spektrum. Metode ini dibedakan menjadi dua yaitu 'Time Domain' dan 'Frekuensi Domain'. Kedua metode tersebut bisa saling berhubungan.

Analisis spektral dengan 'time domain' sering disebut Analisis Runtun Waktu (Time Series Analysis). 'Time Series' sendiri adalah sekelompok nilai pengamatan, baik deterministik maupun random, yang diperoleh pada titik waktu yang berjarak tetap, secara berurutan, dinotasikan dengan $X(t)$. Sedangkan analisis 'time series' merupakan teknik analisis data dari proses yang random dengan parameter waktu (t). Dengan

analisis ini bisa diduga sifat-sifat seluruh proses secara dinamik. Tetapi terutama sekali digunakan untuk memodelkan dan meramal proses tersebut di waktu yang akan datang dari nilai proses masa lalu dengan membentuk model statistik berdasarkan perilaku/pola masa lalunya.

Pembentukan 'spectral density function' adalah tujuan analisis spektral 'frequency domain'. Secara phisik, 'spectral density function' menggambarkan distribusi energi. Luasan yang terbentuk dibawah kurva menyatakan total energi yang ada.

3.1 ASUMSI - ASUMSI

Untuk dapat dianalisis spektral, suatu proses harus memenuhi asumsi-asumsi dibawah ini :

1. Random Stasioner

Suatu proses dikatakan random stasioner apabila proses tersebut dalam keadaan 'Statistical Equilibrium' pada suatu mean level tertentu dan varians konstan. Apabila $P\{X(t)\}$ menyatakan distribusi probabilitas untuk waktu t maka suatu proses yang stasioner harus memenuhi $P\{X(t_1), X(t_2) \dots X(t_n)\} = P\{X(t_1+k), X(t_2+k) \dots X(t_n+k)\}$ dimana t_i menyatakan waktu dan t, k adalah konstanta sembarang. Proses yang demikian biasanya dihasilkan dari sistim yang sudah stabil.

2. Ergodik

Teorema ergodik timbul karena adanya kesulitan praktis

mendapatkan statistik yang 'ensemble'. Teorema ini menyatakan bahwa jika f adalah fungsi random stasioner yang ergodik maka momen pertama dan fungsi autokovarians yang didapatkan dengan 'ensemble averages' identik dengan perhitungan 'time averages' untuk setiap realisasi, yaitu

$$m_0 = E\{f(t, \alpha)\} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t, \alpha) dt$$

$$\Gamma(r) = E\{[f(t+r, \alpha) - m_0][f(t, \alpha) - m_0]\}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t+r, \alpha) - m_0][f(t, \alpha) - m_0] dt$$

Dengan teorema ergodik, taksiran untuk keduanya adalah

$$m_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\Delta)$$

$$\Gamma(r) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-(r/\Delta)} [f(n\Delta+r) - m_0][f(n\Delta) - m_0]$$

dimana Δ adalah interval waktu yang kecil, kurang dari T

r adalah kelipatan Δ

$$N = \frac{T}{\Delta} \quad \text{atau} \quad N\Delta = T$$

Kondisi ini valid untuk proses yang stokastik.

3.2 ANALISIS SPEKTRAL UNTUK GELOMBANG LAUT

Dari bab 2, dapat dikatakan bahwa gelombang laut meru-

pakan proses yang penuh kekompleksan, ketidakpastian dan ketidakaturan. Ketidakaturan ditimbulkan oleh adanya superposisi sejumlah besar gelombang sinusoidal yang berbeda panjang dan tingginya. Selain itu superposisi juga menyebabkan pola keadaan laut tidak pernah terulang dari waktu ke waktu. Dengan keadaan demikian, gelombang laut merupakan proses yang random. Dan karena alam adalah sistim yang stabil maka gelombang laut jelas proses yang random stasioner.

Hanya ada satu cara untuk memperhitungkan ketidakaturan gelombang laut yaitu dengan menentukan total energi. Energi gelombang sinusoidal berbanding langsung dengan kuadrat amplitudonya, $\frac{1}{2} \rho g a^2$ dan merupakan gabungan energi kinetik dan energi potensialnya. Total energi gelombang laut adalah gabungan energi seluruh gelombang, yaitu

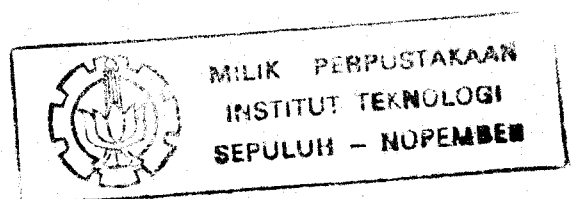
$$\frac{1}{2} \rho g (\frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \dots + \frac{1}{2} a_n^2)$$

per satuan luas permukaan laut.

Untuk setiap keadaan laut dapat digambarkan dengan distribusi energi untuk frekuensi yang berbeda. Distribusi frekuensi energi disebut spektrum energi.

3.3 ANALISIS SPEKTRAL

Gagasan analisis spektral didasarkan pada deret Fourier. Setiap proses atau fungsi $f(x)$ yang mempunyai sifat periodik dapat dinyatakan sebagai jumlahan fungsi sinus dan kosinus. Dan fungsi ini dapat dinyatakan dalam deret Fourier,



$$f(x) = \sum_{r=0}^n [a_r \cos(2\pi r x/p) + b_r \sin(2\pi r x/p)] \quad \dots \quad (3.3.1)$$

dimana $\{a_r\}$, $\{b_r\}$ adalah koefisien Fourier

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \omega r x \, dx$$

$$b_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \omega r x \, dx$$

p adalah periode, yang besarnya $2\pi/\omega$

$r = 0, 1, 2, \dots$

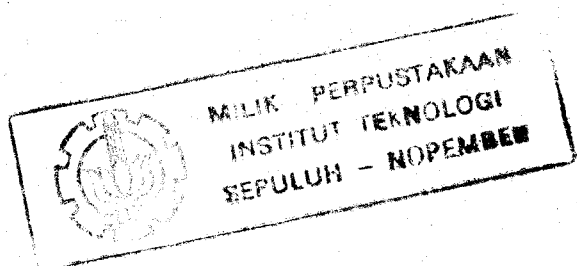
Sedang untuk fungsi yang tidak periodik diartikan sebagai fungsi yang periodenya tak terhingga (infinite period) atau $p \rightarrow \infty$. Fungsi ini dinyatakan dalam integral Fourier,

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{g(\omega) \cos \omega x + k(\omega) \sin \omega x\} d\omega \quad \dots \quad (3.3.2)$$

dimana $g(\omega)$ dan $k(\omega)$ adalah fungsi yang ditentukan dari bentuk $f(x)$

Penurunan (3.3.2) sebagai bentuk pendekatan (3.3.1) valid hanya jika $f(x)$ memenuhi kondisi tertentu, yaitu $f(x)$ harus 'absolutely integrable' atau

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty \quad \dots \quad (3.3.3)$$



Fungsi-fungsi tersebut penting untuk menunjukkan proses fisik dimana penghamburan energi total oleh proses untuk setiap interval waktu adalah sama dengan jumlahan sejumlah besar energi yang dibawa oleh bentuk sinus atau kosinus yang sebanding dengan $(a_r^2 + b_r^2) = |A_r|^2$ yang merupakan amplitudo gelombang.

Persamaan (3.3.1) dapat ditulis dalam bentuk variabel kompleks yaitu

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{i\omega_r x} \quad \dots\dots (3.3.4)$$

dengan

$$A_r = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_r - ib_r) & r < 0 \\ a_0 & r = 0 \\ \frac{1}{2} (a_{|r|} + ib_{|r|}) & r > 0 \end{cases}$$

Dan untuk persamaan (3.3.2) ditulis sebagai

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \dots\dots (3.3.5)$$

dengan

$$p(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{g(\omega) - ik(\omega)\} & \omega > 0 \\ g(0) & \omega = 0 \\ \frac{1}{2} \{g(|\omega|) + ik(|\omega|)\} & \omega < 0 \end{cases}$$

Fungsi $p(\omega)$ disebut Transformasi Fourier untuk $f(x)$.

Deret Fourier dan Integral Fourier dapat dikombinasikan

dalam rumus tunggal,

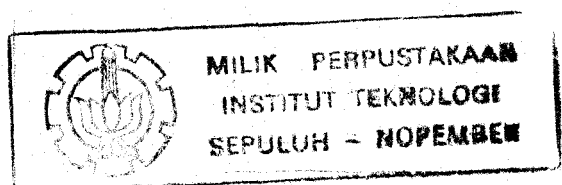
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dP(\omega) \quad \dots\dots (3.3.6)$$

dengan $P(\omega)$ fungsi kompleks yang disebut Transformasi Fourier-Stieltjes untuk $f(x)$. Jika $f(x)$ fungsi tak periodik, $P(\omega)$ akan 'differentiable' sehingga (3.3.6) mempunyai bentuk yang sama dengan (3.3.5) karena $dP(\omega)/d\omega = p(\omega)$. Sedang bila $f(x)$ periodik dengan periode p maka $dP(\omega)$ mempunyai bentuk

$$dP(\omega) = \begin{cases} A_n & , \omega = \omega_p, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & , \text{selain itu} \end{cases}$$

sehingga (3.3.6) akan menjadi (3.3.4). $P(\omega)$ merupakan 'step-function'.

Dalam statistik, yang dihadapi adalah proses yang random. Proses yang random stasioner $X(t)$ tidak bisa dinyatakan baik dalam deret Fourier maupun integral Fourier, karena deret dan integral Fourier hanya dapat digunakan untuk fungsi yang deterministik. Selain itu, tidak dapat dideretkan Fourier karena tidak bisa dijamin akan periodik di setiap titik dan tidak memenuhi syarat untuk di-integral Fourier-kan karena $X(t)$ tidak memenuhi syarat (3.3.3) dan dengan adanya sifat stasioner, menjadi tidak benar bahwa semua realisasi akan menuju nol bila $t \rightarrow \pm\infty$. (Jika benar, jelas proses tersebut tidak stasioner karena sifat proses untuk t yang besar



berbeda dari sifat proses untuk t yang kecil). Untuk mengatasi kesulitan tersebut, pertama-tama hanya memandang satu realisasi saja. Dan dengan teori Wiener tentang 'Generalized Harmonic Analysis', $X(t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk (3.3.6), karena setiap realisasi proses yang random stasioner pada dasarnya adalah fungsi yang 'steady-state'.

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad \dots\dots (3.3.7)$$

dimana $Z(\omega)$ tidak 'differentiable', tetapi mempunyai bentuk $dZ(\omega) = O(\sqrt{d\omega})$. Selanjutnya digunakan teknik 'truncation', dengan memilih T dan memotong realisasi pada titik $t = -T$ dan $t = T$, serta mendefinisikan fungsi baru

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & , \quad -T \leq t \leq T \\ 0 & , \quad \text{selain itu} \end{cases} \quad \dots\dots (3.3.8)$$

Dengan demikian (3.3.8) memenuhi kondisi (3.3.3) sehingga dapat dinyatakan sebagai integral Fourier (lihat appendix A),

$$X_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \dots\dots (3.3.9)$$

dimana

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \quad \dots\dots (3.3.10)$$

Pada interval $(-T, T)$ $X(t)$ dan $X_T(t)$ identik.

Total energi yang terdapat pada $X(t)$ (lihat appendix B) adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \quad \dots\dots (3.3.11)$$

$|G_T(\omega)|^2$ diinterpretasikan sebagai kontribusi total energi $X_T(t)$ yang diktribusi oleh komponen-komponen gelombang antara frekuensi ω , $\omega + d\omega$. Bila $T \rightarrow \infty$, maka $X_T(t)$ dan $X(t)$ akan identik untuk semua t dan $\{\lim_{T \rightarrow \infty} |G_T(\omega)|^2\}$ akan menggambarkan sifat-sifat $X(t)$ sendiri. Akan tetapi pendekatan ini terlalu kasar. Jika $G_T(\omega)$ konvergen dengan fungsi tersebut untuk $T \rightarrow \infty$ maka interpretasi dimulai dari $X(t)$ tanpa menyinggung fungsi $X_T(t)$. Padahal dalam kenyataan $X(t)$ tidak memiliki sifat-sifat integral Fourier, sehingga menjadi jelas bahwa $\{\lim_{T \rightarrow \infty} |G_T(\omega)|^2\}$ tidak ada. Hal ini sama dari pertimbangan phisik, karena pada keadaan 'steady-state' jumlah energi proses dari $t = -\infty$ sampai $t = \infty$ menjadi tak terhingga. Keadaan demikian sama dengan total energi fungsi periodik untuk interval waktu $(-\infty, \infty)$. Karena kesulitan ini maka perhatian dialihkan pada 'power' daripada energi, yaitu walaupun $|G_T(\omega)|^2 \rightarrow \infty$ bila $T \rightarrow \infty$, 'power' yang diktribusi oleh berbagai komponen frekuensi akan konvergen. 'Power' diu-

kur dalam bentuk energi per satuan waktu.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{2T} = \text{kontribusi total power} \dots\dots (3.3.12)$$

$X(t)$ yang berkontribusi
oleh komponen-komponen
antara frekuensi $\omega, \omega + d\omega$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \{|G_T(\omega)|^2 / 2T\}$ ini hanya berlaku untuk realisasi tunggal sehingga hanya menggambarkan sifat satu realisasi saja. Oleh karenanya perlu diketahui sifat-sifat seluruh proses stokastik ialah dengan merata-rata nilai tersebut untuk seluruh realisasi, yaitu

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [E\{|G_T(\omega)|^2 / 2T\}] \dots\dots (3.3.13)$$

Fungsi $h(\omega)$ ini mempunyai sifat seperti 'probability density function'. Oleh karenanya disebut '(non-normalized) power spectral density function of $X(t)$ ' atau '(non-normalized) spectrum of $X(t)$ '. Sedang fungsi $H(\omega)$ yang bersifat seperti fungsi distribusi disebut '(non-normalized) integrated spectrum', didefinisikan dengan

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) d\theta \dots\dots (3.3.14)$$

Untuk perhitungan selanjutnya perlu dicari '(normal) spectral density function' (s.d.f) maupun '(normal) integrated spectrum'. Dari appendix C diketahui bahwa

$$\sigma_X^2 \equiv R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega = H(+\infty) \quad \dots\dots (3.3.15)$$

dimana σ_X^2 adalah varians dari $X(t)$. Didapat

$$f(\omega) = \frac{h(\omega)}{\sigma_X^2} \quad \dots\dots (3.3.16)$$

yang merupakan normal s.d.f dan normal integrated spectrumnya adalah

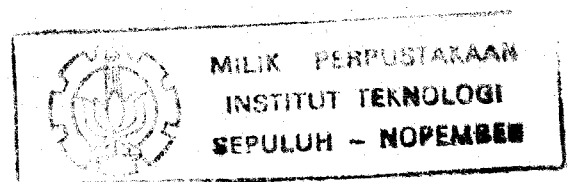
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\theta) d\theta \quad \dots\dots (3.3.17)$$

Sifat-sifat $f(\omega)$ yang menyebabkannya disebut sebagai s.d.f dapat dilihat pada appendix D.

3.3.1 ESTIMASI SPEKTRA DISKRET

Dalam praktek, jika proses parameter kontinyu dianalisis dengan metode digital maka perlu mengubahnya menjadi proses parameter diskret dengan membaca nilainya pada interval waktu (Δt) yang diskret. Pemilihan Δt sedemikian hingga memenuhi $N = T/\Delta t$. Besarnya Δt harus cukup kecil agar 'aliasing effect' tidak begitu serius. Dan untuk sementara, 'power' di luar range $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$ di 'superimposed' ke dalam interval tersebut.

Proses yang mempunyai 'purely discrete spectrum' modelnya dinyatakan dalam model harmonik.



$$X_t = \sum_{i=1}^k A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) + \epsilon_t \quad \dots\dots (3.3.18)$$

dimana :

k , $\{A_i\}$, $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ adalah konstanta .

ϕ_i didistribusikan pada $(-\pi, \pi)$.

$\{\epsilon_t\}$ $(0, \sigma_\epsilon^2)$ adalah 'purely random proses'

Untuk N observasi X_1, X_2, \dots, X_N . Model (3.3.18) dapat juga ditulis sebagai

$$X_t = \sum_{i=1}^k (A_i' \cos \omega_i t + B_i' \sin \omega_i t) + \epsilon_t \quad \dots\dots (3.3.19)$$

dimana $\{\omega_i\}$ tidak diketahui

$$A_i' = A_i \cos \phi_i$$

$$B_i' = -A_i \sin \phi_i$$

$$A_i = \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2}$$

$$\phi_i = \tan^{-1}(-B_i'/A_i')$$

A_i' dan B_i' adalah parameter-parameter yang tidak diketahui. Oleh karena itu dicari taksirannya, yaitu dengan metode 'least square' yang meminimumkan

$$Q = \sum_{t=1}^N \{X_t - \sum_{i=1}^k (A_i' \cos \omega_i t + B_i' \sin \omega_i t)\}^2 \quad \dots\dots (3.3.20)$$

Didapat persamaan normal

$$\sum_{t=1}^N X_t \cos \omega_j t = \sum_{i=1}^k A_i' c_{ij} + \sum_{i=1}^k B_i' d_{ij} \quad \dots\dots (3.3.21)$$

$$\sum_{t=1}^N X_t \sin \omega_j t = \sum_{i=1}^K \hat{A}_i' d_{ij} + \sum_{i=1}^K \hat{B}_i' s_{ij}$$

$$\text{dimana } c_{ij} = \sum_{t=1}^N \cos \omega_i t \cos \omega_j t$$

$$s_{ij} = \sum_{t=1}^N \sin \omega_i t \sin \omega_j t \quad \dots\dots (3.3.22)$$

$$d_{ij} = \sum_{t=1}^N \sin \omega_i t \cos \omega_j t$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

Bila $\omega_i = 2\pi p_i/N$, $i = 1, \dots, k$ dimana $0 \leq p_i \leq N/2$ bila N genap dan $0 \leq p_i \leq (N-1)/2$ bila N ganjil, didapatkan hubungan ortogonal untuk fungsi-fungsi $\cos(2\pi p_i/N)$ dan $\sin(2\pi p_i/N)$ sedemikian hingga

$$c_{ij} = s_{ij} = 0 \quad , \text{ untuk } i \neq j$$

$$d_{ij} = 0 \quad , \text{ untuk semua } i, j \quad \dots\dots (3.3.23)$$

$$c_{ii} = s_{ii} = N/2 \quad , \text{ untuk semua } i$$

Dengan mensubstitusi (3.3.23) ke dalam (3.3.21) dihasilkan

$$\hat{A}_i' = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N X_t \cos \omega_i t$$

$$\dots\dots (3.3.24)$$

$$\hat{B}_i' = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N X_t \sin \omega_i t$$

yang merupakan taksiran tak bias untuk A_i' dan B_i' . Varians

Kedua taksiran tersebut adalah

$$\text{var}(\hat{A}_i') = \frac{2}{N} \sigma_{\epsilon}^2 \sum_{t=1}^N \cos^2 \omega_i t = \frac{2\sigma_{\epsilon}^2}{N} \quad \dots\dots (3.3.25)$$

$$\text{var}(\hat{B}_i') = \frac{2}{N} \sigma_{\epsilon}^2 \sum_{t=1}^N \sin^2 \omega_i t = \frac{2\sigma_{\epsilon}^2}{N}$$

$$\text{cov}(\hat{A}_i', \hat{B}_i') = 0 \quad , \text{ untuk semua } i$$

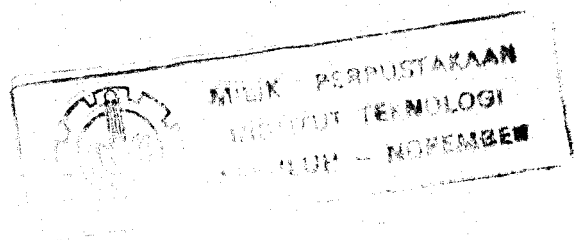
Taksiran varians errornya adalah

$$\hat{\sigma}_{\epsilon}^2 = \frac{1}{N-2k} \sum_{t=1}^N \{X_t - \sum_{i=1}^k (\hat{A}_i' \cos \omega_i t + \hat{B}_i' \sin \omega_i t)\}^2 \quad \dots\dots (3.3.26)$$

3.3.2 ANALISIS PERIODOGRAM

Taksiran \hat{A}_i' dan \hat{B}_i' di atas hanya berlaku apabila $\{\omega_i\}$ diketahui. Sedang bila $\{\omega_i\}$ tidak diketahui maka harus ditaksir terlebih dahulu dan taksiran A_i' , B_i' tidak bisa dilakukan dengan metode 'least square'. Prosedur yang biasanya digunakan menemukan $\{\omega_i\}$ adalah menggunakan teknik 'search' yang didasarkan pada fungsi periodogram. Fungsi ini dikenal pertama kali oleh Schuster (1898) dalam hubungan dengan model 'hidden periodicities' yaitu $\{x_t\}$ dalam (3.3.18) dianggap menutupi bentuk trigonometri periodik, keperiodikannya tersembunyi di bawah 'noise process'.

Analisis periodogram dimulai dengan mereka-reka nilai



ω_1 , misal $\hat{\omega}_1$. Bila nilai tersebut tepat atau mendekati frekuensi yang ditaksir, maka A_1 , B_1 dan $(A_1'^2 + B_1'^2)$ tidak sama dengan nol. Jika sebaliknya, maka nilai $(A_1'^2 + B_1'^2)$ akan mendekati nol. Oleh karenanya cara menemukan $\{\omega_p\}$ adalah dengan melihat nilai $(A_1'^2 + B_1'^2)$ dan memilih $\{\omega_1\}$ yang mempunyai nilai $(A_1'^2 + B_1'^2)$ cukup besar.

N observasi, X_1, X_2, \dots, X_N , mempunyai periodogram dengan ω terletak dalam range $-\pi \leq \omega \leq \pi$,

$$I_N(\omega) = \{A(\omega)\}^2 + \{B(\omega)\}^2 \quad \dots \quad (3.3.27)$$

dimana

$$A(\omega) = \sqrt{(2/N)} \sum_{t=1}^N X_t \cos \omega t \quad \dots \quad (3.3.28)$$

$$B(\omega) = \sqrt{(2/N)} \sum_{t=1}^N X_t \sin \omega t$$

Fungsi (3.3.27) dapat ditulis

$$I_N(\omega) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-i\omega t} \right|^2 \quad \dots \quad (3.3.29)$$

Pengujian nilai $I_N(\omega)$ hanya dapat dilakukan untuk himpunan frekuensi yang diskret.

Misalnya menguji

$$I_p \equiv I_N(\omega_p), \quad p = 0, 1, \dots, (N/2), \quad \dots \quad (3.3.30)$$

Jika ω_p bertepatan dengan satu frekuensi ω_1 dari model (3.3.19) maka membandingkan (3.3.24) dengan (3.3.28)

$$A(\omega_p) = \sqrt{(N/2)} \hat{A}_1' \quad \text{dan} \quad B(\omega_p) = \sqrt{(N/2)} \hat{B}_1' \quad \dots\dots (3.3.31)$$

sehingga

$$E[I_p] = \frac{N}{2} [E(\hat{A}_1'^2) + E(\hat{B}_1'^2)]$$

tetapi

$$E(\hat{A}_1'^2) = \{E(\hat{A}_1')\}^2 + \text{var}(\hat{A}_1')$$

$$\therefore A_1'^2 + \frac{2\sigma_{\epsilon}^2}{N}$$

$$E(\hat{B}_1'^2) = \{E(\hat{B}_1')\}^2 + \text{var}(\hat{B}_1')$$

$$\therefore B_1'^2 + \frac{2\sigma_{\epsilon}^2}{N}$$

sehingga

$$\begin{aligned} E[I_p] &= \frac{N}{2} (A_1'^2 + B_1'^2) + 2\sigma_{\epsilon}^2 \\ &= \frac{N}{2} A_1^2 + 2\sigma_{\epsilon}^2 \end{aligned}$$

Periodogram dapat dinyatakan sebagai fungsi autokovarians,

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{R}(s) \cos s\omega \quad \dots\dots (3.3.33)$$

dimana

$$\hat{R}(s) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|s|} x_t x_{t+|s|} \quad \text{adalah fungsi autokovarians}$$

sampel yang bias

Bukti :

$$\begin{aligned}
 I_N(\omega) &= \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-i\omega t} \right|^2 \\
 &= \frac{2}{N} \left[\sum_{t=1}^N X_t e^{-i\omega t} \right] \left[\sum_{t=1}^N X_t e^{-i\omega t} \right]^* \\
 &= \frac{2}{N} \left[\sum_{t=1}^N \sum_{r=1}^N X_t X_r \cos(t-r)\omega \right] \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \left[\sum_{t=1}^{N-|s|} X_t X_{t+|s|} \right] \cos s\omega \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{R}(s) \cos s\omega
 \end{aligned}$$

Dalam analisis ini $\{X_t\}$ diasumsikan berdistribusi normal dengan mean nol dan varians σ_X^2 atau $X_t \sim N(0, \sigma_X^2)$. $A(\omega_p)$ dan $B(\omega_p)$ adalah kombinasi linier dari X_t . Oleh karenanya $\{A(\omega_p)\}$ dan $\{B(\omega_p)\}$ juga berdistribusi multivariate normal dan karena keduanya 'mutually uncorrelated' maka merupakan variabel random yang independen. Hubungan $A(\omega_p)$ dan $B(\omega_p)$ dalam periodogram menyebabkan $I_p (= I_N(\omega_p))$ mempunyai distribusi χ_2^2 atau ekuivalen dengan distribusi eksponensial.

3.3.3 SPEKTRA KONTINYU

Proses linier umum X_t yang mempunyai spektra kontinyu dalam kasus parameter diskret berbentuk

$$X_t = \sum_{u=0}^{\infty} g_u \epsilon_{t-u} \quad \dots\dots (3.3.34)$$

$\{\epsilon_t\}$ adalah proses yang random. Bentuk tersebut dapat diambil sebagai prototipe model proses dengan spektra Kontinyu, sehingga dipakai sebagai model perbandingan standar untuk spektra yang Kontinyu dengan asumsi $\sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u^2 < \infty$ dan $E(\epsilon_t) = 0$ sehingga $E(X_t) = 0$ dan $E(\epsilon_t^2) = \sigma_{\epsilon}^2$.

Untuk N observasi X_1, X_2, \dots, X_N , (non-normalized) s.d.f. dapat ditulis

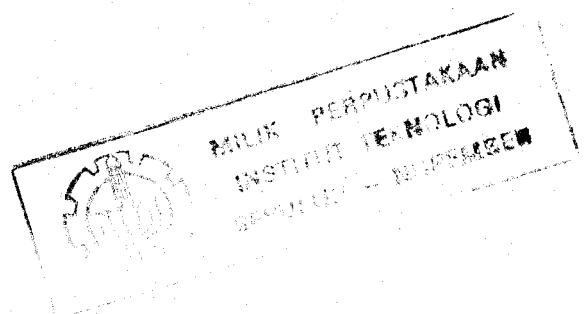
$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R(s) \cos s\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad \dots\dots (3.3.35)$$

dengan asumsi $h(\omega)$ Kontinyu untuk semua ω , yaitu jika $R(s)$ 'absolutely summable' atau $\sum_{s=-\infty}^{\infty} |R(s)| < \infty$. Taksiran $R(s)$ hanya dapat dilakukan untuk $s=0, 1, \dots, \pm(N-1)$ ($|s| < N$). Oleh karenanya taksiran $h(\omega)$ melalui $\hat{R}(s)$ hanya dapat untuk jumlahan dari $-(N-1)$ sampai $(N-1)$. Bila (3.3.35) dibandingkan dengan (3.3.33) maka fungsi $h(\omega)$ mempunyai bentuk yang sama dengan

$$I_N^*(\omega) = \frac{1}{4\pi} I_N(\omega) \quad \dots\dots (3.3.36)$$

$I_N^*(\omega)$ adalah $h(\omega)$ untuk sampel, sehingga $I_N^*(\omega)$ sering disebut 'sample s.d.f.'. $I_N^*(\omega)$ disebut juga 'modified periodogram'.

$$E[I_N^*(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} E[\hat{R}(s)] \cos s\omega$$



$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) R(s) \cos s\omega \dots \dots (3.3.37)$$

Bila $N \rightarrow \infty$ maka $(1 - |s|/N) \rightarrow 1$ untuk setiap s , sehingga

$$E[I_N^*(\omega)] \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R(s) \cos s\omega = h(\omega) \dots \dots (3.3.38)$$

Jadi $I_N^*(\omega)$ adalah 'asymptotically unbiased estimate' dari $h(\omega)$. Secara kasar dapat ditulis

$$R(s) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \cos s\theta \, d\theta \dots \dots (3.3.39)$$

sehingga

$$\begin{aligned} E[I_N^*(\omega)] &= \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \{ \cos s(\theta+\omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos s(\theta-\omega) \} \right] d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left\{ \frac{1}{2} F_N(\theta+\omega) + \frac{1}{2} F_N(\theta-\omega) \right\} d\theta \end{aligned}$$

dimana

$$F_N(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(N\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \quad \text{adalah Fejer Kernel}$$

$h(\theta)$ dan $F_N(\theta)$ adalah fungsi genap sehingga

$$E[I_N^*(\omega)] = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) F_N(\theta - \omega) d\theta \quad \dots\dots (3.3.40)$$

Karena $h(\theta)$ diasumsikan kontinyu pada $\theta = \omega$, (3.3.40) konvergen pada $h(\omega)$ bila $N \rightarrow \infty$.

Akan tetapi $I_N^*(\omega)$ ternyata adalah taksiran $h(\omega)$ yang tidak konsisten dalam arti varians $I_N^*(\omega) \not\rightarrow 0$ bila $N \rightarrow \infty$ dan sebagai fungsi dari ω , $I_N^*(\omega)$ mempunyai bentuk yang 'erratic' dan 'widly fluctuating' dimana keadaan ini adalah akibat dari kenyataan bahwa bila ada ω_1 dan ω_2 (frekuensi yang berdekatan), $\text{cov}(I_N^*(\omega_1), I_N^*(\omega_2))$ turun bila N naik.

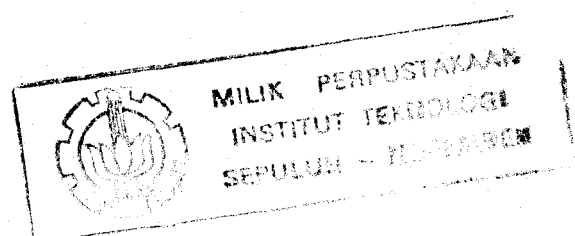
Oleh karena itu diusahakan mendapatkan $\hat{h}(\omega)$ dengan varians yang dikurangi. Jika ini dilakukan akan memperbesar bias. Akan tetapi karena proses yang mempunyai spektrum kontinyu, $R(s) \rightarrow 0$ bila $|s| \rightarrow \infty$ maka bias tidak akan berpengaruh banyak. Gagasan ini dinyatakan dengan menemukan taksiran $h(\omega)$ sebagai

$$\hat{h}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M \hat{R}(s) \cos s\omega \quad \dots\dots (3.3.41)$$

dimana $M < (N-1)$. Bentuk tersebut disebut 'truncated periodogram' dan M adalah 'truncation point'.

$$E(\hat{h}_0(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) R(s) \cos s\omega \quad \dots\dots (3.3.42)$$

$\rightarrow h(\omega)$ bila $M \rightarrow \infty$



Sehingga jika $M \rightarrow \infty$ bila $N \rightarrow \infty$ maka $\hat{h}_0(\omega)$ adalah 'asymptotically unbiased estimate' dari $h(\omega)$. $\hat{h}_0(\omega)$ terdiri dari $(M+1)$ autokovarians sampel sedang $I_N^*(\omega)$ terdiri dari N autokovarians sampel. Varians $h_0(\omega)$ secara kasar adalah (M/N) dan $\text{var}(I_N^*(\omega)) = O(M/N)$. Dapat dilihat bahwa $(M/N) \rightarrow 0$ bila $N \rightarrow \infty$. Oleh karenanya $\hat{h}_0(\omega)$ akan merupakan taksiran yang konsisten dari $h(\omega)$.

$\hat{h}_0(\omega)$ dipandang sebagai kasus khusus dari bentuk yang lebih umum dari

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) \hat{R}(s) \cos s\omega \quad \dots\dots (3.3.43)$$

dengan definisi

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 & , \quad |s| \leq M \\ 0 & , \quad |s| > M \end{cases} \quad \dots\dots (3.3.44)$$

Karena merupakan fungsi genap (3.3.43) dapat ditulis sebagai

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) \hat{R}(s) e^{-is\omega} \quad \dots\dots (3.3.45)$$

Oleh karenanya dapat ditulis

$$I_{N,X}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{R}(s) e^{-is\omega} \quad \dots\dots (3.3.46)$$

dan taksiran $f(\omega)$ adalah

$$f(\omega) = \frac{h(\omega)}{S_x^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{\lambda}(s) \rho(s) \cos s\omega \dots\dots (3.3.47)$$

dimana

$$\hat{\rho}(s) = \hat{R}(s)/\hat{R}(0)$$

Bila (3.3.46) dibalik, untuk $|s| \leq (N-1)$ didapat

$$\hat{R}(s) = \int_{-\pi}^{\pi} I_{N,X}^*(\theta) e^{js\theta} d\theta \dots\dots (3.3.48)$$

Disubstitusikan dalam (3.3.43),

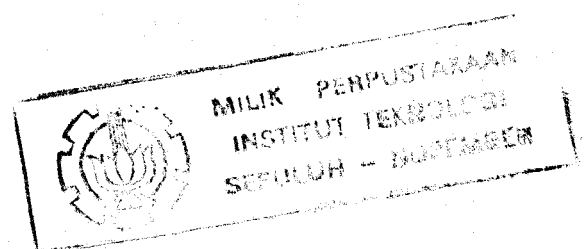
$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{N,X}^*(\theta) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) e^{-js(\omega-\theta)} \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{N,X}^*(\theta) W(\omega-\theta) d\theta \dots\dots (3.3.49) \end{aligned}$$

dimana

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) e^{-s\theta\omega} \dots\dots (3.3.50)$$

Jika $\lambda(s)$ dipilih sebagai fungsi genap yang real maka $W(\theta)$ juga merupakan fungsi genap yang real, sehingga (3.3.50) dapat ditulis

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) \cos s\theta \dots\dots (3.3.51)$$



$\hat{h}(\omega)$ dalam (3.3.49) dikatakan sebagai 'weighted integral' dari periodogram $I_{N,X}(\theta)$ sebagai fungsi pembobot adalah transformasi fourier (diskret) dari $\{\lambda(s)\}$. (3.3.49) adalah 'smoothing' fungsi periodogram.

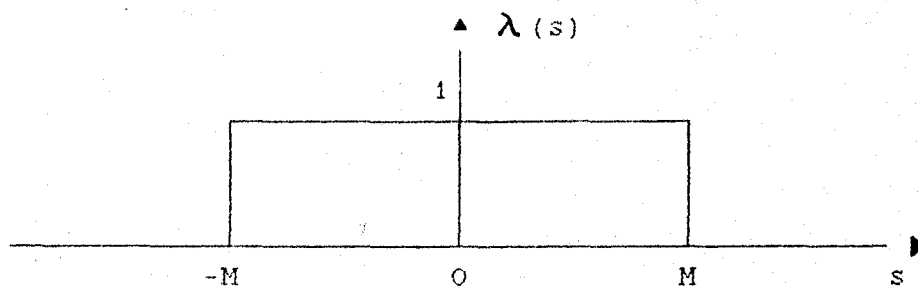
3.3.4. MACAM-MACAM 'WINDOW'

Dalam bab 3.3.3, $\lambda(s)$ disebut sebagai 'lag window' dan $W(\theta)$ disebut 'spectral window', yang merupakan pasangan 'window'. Ada beberapa macam bentuk 'window'. Pemilihan 'window' yang tepat tergantung pada karakteristik persoalan.

1. Truncated Periodogram Window

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 & , |s| \leq M \\ 0 & , |s| > M \end{cases} \dots\dots (3.3.52)$$

dimana $M < (N-1)$ adalah parameter 'window'. Bentuk tersebut dapat digambarkan sebagai berikut



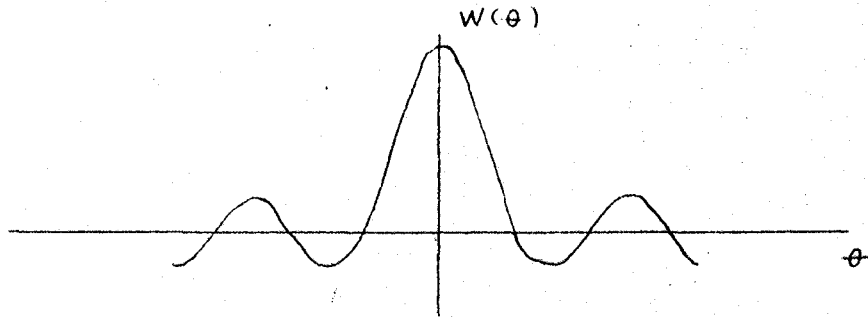
Gambar 3. 1

'spectral window'-nya adalah

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M \cos s\theta = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(M+\frac{1}{2})\theta]}{\sin(\theta/2)} \right\} = D_M(\theta)$$

..... (3.3.53)

digambarkan sebagai

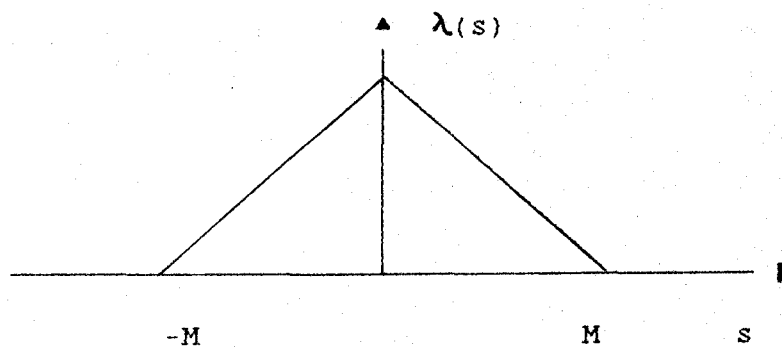


Gambar 3. 2

2. Bartlett Window

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - |s|/M & , |s| \leq M \\ 0 & , |s| > M \end{cases} \quad , M < N$$

bila digambar



Gambar 3. 3

dan

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M \left(1 - \frac{|s|}{M} \right) \cos \theta = \frac{1}{2\pi M} \left\{ \frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right\}^2$$

$$= F_M(\theta) \quad \dots\dots (3.3.54)$$

$F_M(\theta)$ adalah fungsi yang non-negatif.

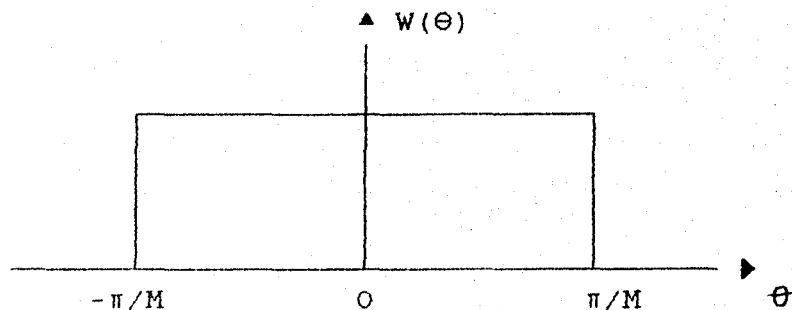
3. Daniel (Rectangular) Window

$$\hat{h}_0(\omega) = \left\{ \frac{M}{2\pi} \right\} \int_{\omega - (\pi/M)}^{\omega + (\pi/M)} I_N^*(\theta) d\theta \quad \dots\dots (3.3.55)$$

Untuk ω yang dekat dengan $\pm\pi$, range $I_N^*(\theta)$ diperluas dengan membuatnya periodik, dengan periode 2π , sehingga $W(\theta)$ juga periodik dengan periode 2π dan pada $(-\pi, \pi)$ mempunyai bentuk

$$W(\theta) = \begin{cases} M/2\pi & , -\pi/M \leq \theta \leq \pi/M \\ 0 & , \text{yang lain} \end{cases} \quad \dots\dots (3.3.56)$$

atau



Gambar 3. 4

dengan

$$\lambda(s) = \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} e^{is\theta} d\theta = \frac{\sin(\pi s/M)}{(\pi s/M)}, \text{ semua } s \quad \dots\dots (3.3.57)$$

$\{\lambda(s)\}$ tidak menghilang setelah nilai $|s|$, sehingga tidak ada 'truncation point'. $W(\theta)$ mempunyai koefisien Fourier yang tidak nol untuk order tinggi, tetapi $\hat{h}_D(\omega)$ hanya meliputi N nilai pertama dari $\lambda(s)$ yaitu

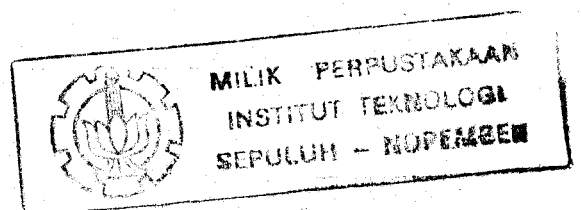
$$\hat{h}_D(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \frac{\sin(\pi s/M)}{(\pi s/M)} R(s) e^{-is\omega} \quad \dots\dots (3.3.58)$$

$\hat{h}_D(\omega)$ adalah fungsi non-negatif. Parameter M disini bukan 'truncation point' tetapi menentukan derajat 'smoothing' periodogram. M lebih kecil berarti lebih 'smooth'. Juga bila M turun, $\lambda(s)$ lebih terpusat di sekitar $s=0$ dan menuju nol lebih cepat. M berfungsi sebagai kontrol 'bandwidth' dari 'spectral window', seperti juga pada window yang lain. Daniel window adalah dual dari 'truncated periodogram window'.

4. General Tukey Window

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos(\pi s/M), & |s| \leq M \\ 0, & |s| > M \end{cases} \quad \dots\dots (3.3.59)$$

dengan $0 < a \leq \frac{1}{4}$ sehingga $\lambda(s) \geq 0$ untuk semua s . Dan



$$\begin{aligned}
 W(\Theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M \{ (1 - 2a) + a(\exp(\pi s/M) + \exp(-\pi s/M)) \} \exp(-is\Theta) \\
 &= aD_M(\Theta - \frac{\pi}{M}) + (1 - 2a) D_M(\Theta) + aD_M(\Theta + \frac{\pi}{M}) \\
 &\dots\dots (3.3.60)
 \end{aligned}$$

Pada frekuensi $(\omega - \pi/M)$, ω dan $(\omega + \pi/M)$, $\hat{h}_T(\omega)$ dapat ditulis

$$\hat{h}_T(\omega) = a\hat{h}_0(\omega - \pi/M) + (1-2a)\hat{h}_0(\omega) + a\hat{h}_0(\omega + \pi/M) \dots\dots (3.3.61)$$

5. Tukey-Hanning Window

Window ini adalah General Tukey Window dengan $a=0,25$ sehingga

$$\lambda(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi s/M)], & |s| \leq M \\ 0, & |s| > M \end{cases} \dots\dots (3.3.62)$$

6. Tukey-Hamming Window

Window ini mengambil $a=0,23$ sehingga

$$\lambda(s) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi s/M), & |s| \leq M \\ 0, & |s| > M \end{cases} \dots\dots (3.3.63)$$

7. Parzen Window

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - 6(s/M)^2 + 6(|s|/M)^3, & |s| \leq M/2 \\ 2(1 - |s|/M)^3, & M/2 \leq |s| \leq M \\ 0, & |s| > M \end{cases} \quad \dots\dots (3.3.63)$$

M diasumsikan genap, sehingga

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{s=-M/2}^{M/2} \{ 1 - 6(s/M)^2 + 6(|s|/M)^3 \} \cos s\theta \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{M/2 \leq |s| \leq M} \left(1 - \frac{|s|}{M} \right)^3 \cos s\theta \right] \\ &= \frac{3}{8\pi M^3} \left(\frac{\sin(M\theta/4)}{\frac{1}{2}\sin(\theta/2)} \right)^4 \left\{ 1 - \frac{2}{3} \sin^2(\theta/2) \right\} \dots\dots (3.3.64) \end{aligned}$$

Parzen window bisa diturunkan dari Bartlett window dengan parameter $M/2$ (M genap).

8. Bartlett-Priestly window

Adalah spectral window yang kuadratik.

$$W(\theta) = \begin{cases} \frac{3M}{4\pi} \left\{ 1 - \left(\frac{M\theta}{\pi} \right)^2 \right\}, & |\theta| \leq \pi/M \\ 0, & |\theta| > \pi/M \end{cases} \quad \dots\dots (3.3.65)$$

dan

$$\lambda(s) = \left(\frac{3M}{\pi s} \right)^2 \left\{ \frac{\sin(\pi s/M)}{\pi s/M} - \cos(\pi s/M) \right\} \dots\dots (3.3.66)$$

3.3.5 BIAS DAN DERAJAT BEBAS, V

Periodogram adalah taksiran $h(\omega)$ yang tak bias, kecuali bila N kecil. 'Smoothing' dengan window berarti bahwa $\hat{h}(\omega)$ adalah rata-rata terbobot ordinat periodogram, yang secara umum akan menaikkan bias walaupun $M \rightarrow \infty$ bila $N \rightarrow \infty$. Bias $\hat{h}(\omega)$ pada frekuensi adalah

$$b(\omega) = [E\{\hat{h}(\omega)\} - h(\omega)] \quad \dots\dots (3.3.68)$$

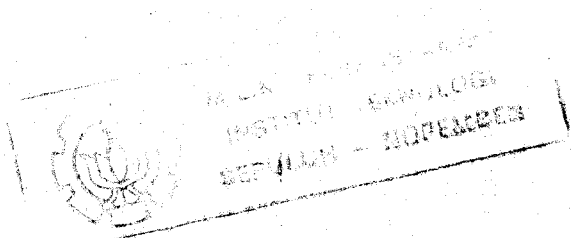
Besar bias biasanya tergantung pada lebar window dan derajat kurva s. d. f.

Jika (3.3.2) ditaksir pada $\omega_p = 2\pi p/N$ yang diskret, maka

$$\hat{h}(\omega) \sim \left(\frac{2\pi}{N} \right) \sum_p W_N(\omega - \omega_p) I_N^*(\omega_p) \quad \dots\dots (3.3.69)$$

Untuk N yang besar (3.3.69) dipandang sebagai kombinasi linier terbobot χ^2 . Jika bobotnya sama untuk semua 'band' frekuensi dan nol selain itu, maka jumlahan asimptotnya juga berdistribusi χ^2 . Adalah memungkinkan menaksir distribusi $\{\hat{h}(\omega)/h(\omega)\}$ dengan distribusi berbentuk $\{a \chi_v^2\}$. a dan v adalah konstanta yang dipilih sedemikian hingga mean dan varians $\{a \chi_v^2\}$ mempunyai distribusi yang sama dengan distribusi $\{\hat{h}(\omega)/h(\omega)\}$.

Berdasarkan $\lim E\{\hat{h}(\omega)\} = h(\omega)$ untuk semua ω dan vari-
ans $\{\hat{h}(\omega)\} \sim (1 + \partial_{\omega, 0, \pi}) h^2(\omega) = \left\{ \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N^2(s) \right\}$ serta mean dan
variens χ^2 adalah v dan $2v$, maka



$$1 = av$$

$$\frac{1}{N} \left(\sum_s \lambda_N^2(s) \right) = \begin{cases} 2a^2 v, & \omega \neq 0, \pm\pi \\ a^2 v, & \omega = 0, \pm\pi \end{cases}$$

didapatkan

$$a = 1/v$$

$$v = 2N / \left\{ \sum_s \lambda_N^2(s) \right\}, \quad (\omega \neq 0, \pm\pi) \quad \dots\dots (3.3.70)$$

Dengan cara yang sama, untuk menaksir parameter skala window,

$$v = 2N / \left\{ M \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du \right\} \quad \dots\dots (3.3.71)$$

Parameter v disebut 'equivalent degrees of freedom' taksiran spektral.

3.3.6 PEMILIHAN WINDOW

Bagian paling pokok dalam menaksir s.d.f. adalah memilih window yang tepat, yang akan menentukan pemilihan 'window bandwidth' atau ekuivalen dengan pemilihan M yang tepat. Kriteria pemilihan window adalah sebagai berikut :

1. Leakage

Untuk $W_N(\theta)$, $E\{\hat{h}(\omega)\}$ adalah rata-rata terbobot dari $h(\theta)$, dengan bobot $W_N(\omega-\theta)$. Misalnya, pada truncated periodogram window, lobe utama dipusatkan pada $\theta=0$. lobe lain yang pada dasarnya negatif, dipusatkan pada $\theta=3\pi/(2M+1)$ dan subsidiary

lobe pada $\Theta \pm 5\pi/(2M+1)$, $7\pi/(2M+1)$, Ada kontribusi pokok pada $E\{\hat{h}(\omega)\}$ dari nilai $h(\Theta)$ pada $\Theta \pm \omega \pm 3\pi/(2M+1)$, $\omega \pm 5\pi/(2M+1)$, ... dan jika, misalnya, $\omega \pm 3\pi/(2M+1)$ terjadi bertepatan dengan suatu puncak pada $h(\Theta)$ maka akan mempengaruhi nilai $E\{h(\omega)\}$. Efek ini disebut 'leakage'.

Pemilihan window, dalam hal ini sebaiknya yang memiliki 'leakage' terkecil. Tetapi kriteria ini tidak memberi dasar yang kuat untuk pemilihan window.

2. Integrated mean square error

Integrated mean square error didefinisikan dengan

$$M_I = \int_{-\pi}^{\pi} E\{\hat{h}(\omega) - h(\omega)\}^2 d\omega \quad \dots\dots (3.3.72)$$

Lag window $\lambda_N(s)$ yang meminimumkan M_I adalah

$$\lambda^*(s) = \frac{R^2(s)}{\text{var}\{\hat{R}(s)\} + R^2(s)} \quad \dots\dots (3.3.73)$$

Fungsi ini tergantung pada fungsi autokovarians teoritis yang tidak diketahui sehingga tidak dapat digunakan dalam praktek. Lomnicki dan Zaremba mencoba mendekatinya dengan

$$\lambda^*(s) = \frac{\rho^{|s|}}{\frac{1}{N-|s|} \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right) + \rho^{|s|}} \quad \dots\dots (3.3.74)$$

Bentuk ini tidak optimal. Kriteria ini memberi bobot yang sama pada seluruh frekuensi. Tetapi tanpa informasi awal tentang $h(\omega)$, sulit dilakukan.

3. Expected maximum squared error

Didefinisikan oleh Parzen,

$$M_M = E[\max \{ \hat{h}(\omega) - h(\omega) \}^2] \quad \dots\dots (3.3.75)$$

yang merupakan pertimbangan yang relevan bila menyusun 'confidence bands' untuk s. d. f. Kriteria ini menggunakan ketidaksamaan chebysheff, yaitu

$$P[\max | \hat{h}(\omega) - h(\omega) | > \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} M_M \quad \dots\dots (3.3.76)$$

untuk setiap $\epsilon > 0$.

Pengujian ini sulit dilakukan dan tidak memberi hasil yang optimum.

4. Maximum relative mean square error

Grenader dan Rosenblatt :

$$\eta^2(\omega) = \{ v^2(\omega) + b^2(\omega) \} / h^2(\omega) \quad \dots\dots (3.3.77)$$

adalah 'mean square error' relatif. $v^2(\omega)$, varians $\hat{h}(\omega)$ dan $b(\omega)$, bias $\hat{h}(\omega)$.

$$M_R = \max_{0 < \omega < \pi} \{ \eta^2(\omega) \} \quad \dots\dots (3.3.78)$$

dan

$$\eta^2(\omega) \sim \frac{M}{N} \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du + \frac{1}{M^{2r}} \{k^{(r)}\}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda^{(r)}(\omega)} \right\}^{2r} \dots (3.3.79)$$

dengan $\lambda^{(r)}(\omega) = |h(\omega)/h^{(r)}(\omega)|^{1/r}$ adalah 'spectral bandwidth' order r pada frekuensi ω . Maksimum $\eta^2(\omega)$ adalah minimum nilai $\lambda^{(r)}(\omega)$. Minimum M_R didapat

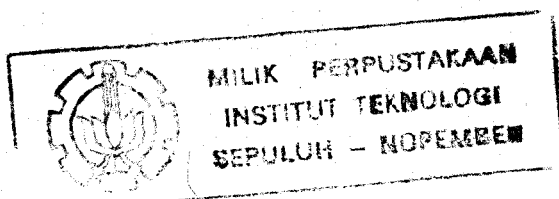
$$\begin{aligned} \min_M \{M_R\} &\sim N^{-2r/(2r+1)} \left\{ \frac{B_w' I_w}{2\sqrt{6} O(r)} \right\}^{2r/(2r+1)} \{(2r)^{1/(2r+1)} \\ &+ (2r)^{-2/(2r+1)} \dots (3.3.80) \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\min\{M_R\}$ tergantung pada pemilihan window hanya melalui r dan $(B_w' I_w)$. Karena $\min\{M_R\} = O(N^{-2r/(2r+1)})$, maka sebaiknya dipilih r sebesar mungkin agar $\min\{M_R\}$ sekecil mungkin. Tetapi tidak ada window dengan $r > 2$ yang non-negatif, karena $r > 2 \Rightarrow k^{(2)} = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 k(\theta) d\theta = 0$. Sehingga paling baik menggunakan $r=2$, kecuali untuk Bartlett window, $r=1$.

Bila $r=2$ maka $\lambda_0^{(r)} = \inf_{\omega} \{ \lambda^{(2)}(\omega) \} = \frac{1}{2} B_h$ dan

$$\min\{M_R\} \sim 0,4626 N^{-4/5} \left\{ \frac{B_w' I_w}{\frac{1}{2} B_h} \right\}^{4/5}$$

Karena hanya tergantung pada $(B_w' I_w)$ maka $(B_w' I_w)$ dipandang



sebagai indeks efisiensi window, yaitu semakin kecil $(B_w' I_w)$, semakin kecil 'minimum relative mean square error'-nya.

5. Meminimumkan jumlah data

B_h adalah 'spectral bandwidth'. Memilih M sedemikian hingga

$$B_w = \alpha B_h \quad \dots\dots (3.3.81)$$

Jika $\Delta_p(\omega)$ ukuran presisi, untuk p tertentu dikehendaki sejumlah data N untuk ω yang meminimumkan nilai $\lambda^{(2)}(\omega)$. Bila $\omega = \omega_0$,

$$|\text{bias}\{\hat{h}(\omega_0)\}| \sim \frac{1}{6} \{B_w/B_h\}^2 h(\omega_0) = \frac{1}{6} \alpha^2 h(\omega_0)$$

Diketahui bahwa $\text{var}\{\hat{h}(\omega)\}/h^2(\omega) \sim (I_w M)/N$, sehingga

$$\gamma_p \sqrt{(I_w M/N)} = \left\{ \Delta_p(\omega_0) - \frac{1}{6} \alpha^2 \right\}$$

Diasumsikan bahwa α dan $\Delta_p(\omega_0)$ dipilih sedemikian hingga $\Delta_p(\omega_0) > \frac{1}{6} \alpha^2$, nilai M akan melebihi M_{\min} . Ditentukan nilai N yaitu

$$\begin{aligned} N &= \frac{\gamma_p^2 I_w M}{\left\{ \Delta_p(\omega_0) - \frac{1}{6} \alpha^2 \right\}^2} \\ &= \left[\frac{\gamma_p}{\alpha B_h \left\{ \Delta_p(\omega_0) - \frac{1}{6} \alpha^2 \right\}} \right] (B_w' I_w) \end{aligned}$$

karena $M = B_w' / \alpha B_h$. Nilai M hanya tergantung pada $(B_w' I_w)$, karena γ_p , $\Delta_p(\omega_0)$, α dan B_h adalah konstanta. Demikian pula jika $\Delta_p(\omega_0) < -\frac{\alpha^2}{6}$. Sehingga window dengan nilai $(B_w' I_w)$ yang paling kecil tidak hanya meminimumkan M_R tetapi juga meminimumkan jumlah data untuk presisi yang diinginkan.

3.3.7 MEMILIH Δt

Jika proses parameter kontinyu $\{X(t)\}$ diambil sampelnya pada interval waktu Δt maka akan kehilangan beberapa informasi tentang sifat-sifat spektralnya, yaitu akan kehilangan informasi yang mendetail komponen-komponen frekuensi tinggi dan jelas akan mempengaruhi kemampuan menaksir frekuensi tinggi spektrum.

Misalnya, proses sampel dinotasikan $\{Y_t\}$, $Y_t \equiv X(t, \Delta t)$, $t = 0, 1, \dots$. Dinyatakan dalam bentuk (3.3.7)

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it \cdot \Delta t \cdot \omega) dZ_X(\omega) \\ &= \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \exp(it \cdot \Delta t \cdot \omega) dZ_Y(\omega) \quad \dots \quad (3.3.82) \end{aligned}$$

Y_t cenderung mempunyai range $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$, karena bila t dibatasi dengan Δt maka tidak dapat membedakan komponen-komponen frekuensi $\exp(i\omega t)$ dengan $\exp[i(\omega + 2k\pi/\Delta t)t]$. Komponen frekuensi $X(t)$ pada $\omega \pm 2\pi/\Delta t$, $\omega \pm 4\pi/\Delta t$, ... akan nampak mempunyai frekuensi ω , sehingga frekuensi-frekuensi tersebut dikatakan 'aliases' dari ω dan setiap frekuensi di luar range

$(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$ mempunyai 'aliases' di dalam range tersebut.

S.d.f. untuk Y_t adalah

$$h_Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_X\left(\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}\right), \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \quad \dots (3.3.83)$$

atau

$$h_Y(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_Y(s) \exp(-i\omega s \Delta t) \quad \dots (3.3.84)$$

Persamaan di atas mendasari 'aliasing theorem'.

$$h_Y(\omega) \equiv h_X(\omega), \quad |\omega| \leq \pi/\Delta t$$

Bila frekuensi dinyatakan dalam Hz maka $h_Y(\omega)$ terletak dalam range $(-1/2\Delta t \text{ Hz}, 1/2\Delta t \text{ Hz})$. Jika $h_X(\omega)$ mempunyai bentuk 'band limited' yaitu jika $\equiv \omega_0$ sedemikian hingga $h_X(\omega) \equiv 0$, $|\omega| > \omega_0$, maka dapat memilih Δt cukup kecil untuk kondisi di atas, misalnya $\Delta t < \pi/\omega_0$. Tetapi dalam kenyataannya $h_X(\omega)$ tidak langsung menghilang (vanished) di luar interval tertentu. 'Aliasing effect' dapat dikurangi dengan memilih Δt cukup kecil sehingga $h_X(\omega)$ diabaikan bila $|\omega| \geq \pi/\Delta t$ atau 'power' $X(t)$ pada frekuensi yang lebih tinggi dari $\pi/\Delta t$, diabaikan. Δt ditentukan dengan

$$\omega_0 \leq \pi/\Delta t$$

atau

$$\Delta t \leq \pi/\omega_0$$

Jika t diukur dalam detik dan $f = \omega_0/2\pi$ adalah batas atas

frekuensi, maka

$$f_0 \leq 1/2\Delta t$$

atau

$$\Delta t \leq 1/2f_0$$

3.3.8 PRESISI TAKSIRAN SPEKTRAL

Masalah dalam penentuan parameter (N dan M) taksiran $\hat{h}(\omega)$ adalah memilihnya sedemikian hingga mempunyai derajat presisi yang diinginkan. Ukuran presisi ada 2 alternatif,

1. p% Gaussian range of percentage error, $\Delta_p(\omega)$

Didefinisikan sebagai

$$\Delta_p(\omega) = \gamma_p \frac{v(\omega)}{h(\omega)} + \frac{|b(\omega)|}{h(\omega)} \quad \dots \quad (3.3.85)$$

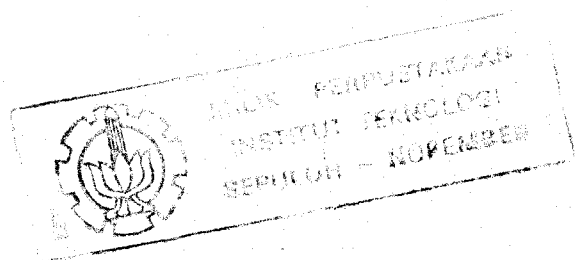
dimana $v(\omega) = \text{var}\{\hat{h}(\omega)\}$ dan $b(\omega) = [E\{\hat{h}(\omega)\} - h(\omega)]$ adalah bias $\hat{h}(\omega)$. Sedang γ_p adalah p% (dua arah) dari distribusi normal standar. Ditulis

$$P\left[\frac{|\hat{h}(\omega) - h(\omega)|}{h(\omega)} \leq \Delta_p(\omega) \right] \geq \frac{p}{100} \quad \dots \quad (3.3.86)$$

2. Mean square percentage error, $\eta(\omega)$

$$\eta^2(\omega) = [E\{\hat{h}(\omega) - h(\omega)\}^2] / h^2(\omega) = \{v^2(\omega) + b^2(\omega)\} / h^2(\omega) \quad \dots \quad (3.3.87)$$

Ukuran ini sebenarnya ekuivalen dengan (1). Dengan ketidak-



samaan Chebycheff,

$$P \left[\frac{|\hat{h}(\omega) - h(\omega)|}{h(\omega)} : \Delta_p(\omega) \right] \leq 1 - \left\{ \frac{\eta(\omega)}{\Delta_p(\omega) h(\omega)} \right\}^2 \quad \dots (3.3.88)$$

Menggunakan $v^2(\omega)$ dan $b(\omega)$ yang asimtot, untuk $\omega \neq 0, \pi$, didapatkan

$$\Delta_p(\omega) = \left\{ -\frac{M}{N} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du \right\} + \left[\frac{k(r)}{M^r \{ \lambda^{(r)}(\omega) \}^r} \right] \right\} \delta_p \quad \dots (3.3.89)$$

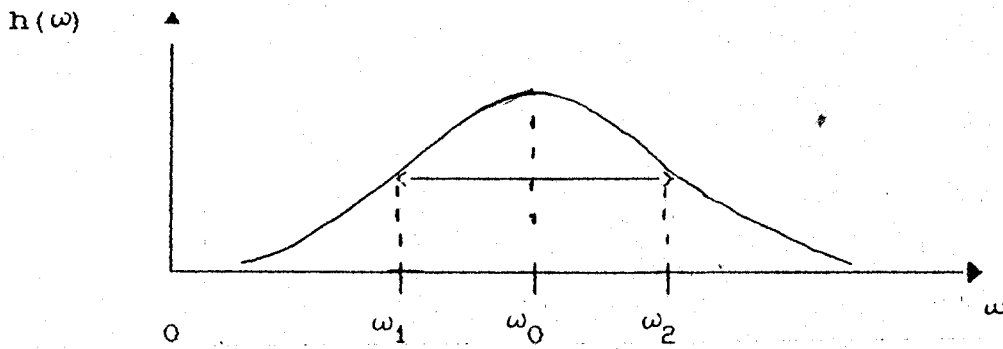
dengan

$$\lambda^{(r)}(\omega) = \left| \frac{h(\omega)}{h^r(\omega)} \right|^{1/r}$$

adalah 'spectral bandwidth' order r pada frekuensi .

3.3.9 SPECTRAL BANDWIDTH

B_h atau 'spectral bandwidth' adalah jarak antara titik 'half-power', ω_1, ω_2 dimana $\omega_1 (< \omega_0)$ dan $\omega_2 (> \omega_0)$ didefinisikan dengan $h(\omega_1) = h(\omega_2) = \frac{1}{2} h(\omega_0)$ (Gambar 3.3.9.1).



Gambar 3.3.9.1

Didefinisikan

$$B_h = (\omega_2 - \omega_1) \quad \dots\dots (3.3.90)$$

dengan asumsi ω_0 tidak dekat dengan $\pm\pi$.

Jika nilai B_h kecil (terhadap ω_0), diperkirakan

$$B_h \approx 2 |h(\omega)/h''(\omega)|^{1/2} \quad \dots\dots (3.3.91)$$

Untuk $r = 2$,

$$B_h \approx 2 \lambda^{(r)}(\omega_0)$$

Bila $h(\omega)$ mempunyai puncak lebih dari satu,

$$B_h = 2 \left\{ \inf_{\omega} |h(\omega)/h''(\omega)|^{1/2} \right\}^{1/2} \quad \dots\dots (3.3.92)$$

3.3.10 WINDOW BANDWIDTH

Kemampuan taksiran mendekati s.d.f yang sesungguhnya tergantung pada besarnya 'window bandwidth' B_w .

Misalnya $h(\omega)$ mempunyai dua puncak, ω_1 dan ω_2 , dan diharapkan taksiran $\hat{h}(\omega)$ menggambarkan $h(\omega)$ cukup teliti.

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{h}(\omega)\} &\sim \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) w_N(\omega - \theta) d\theta \\
 &= \frac{M}{2\pi} \int_{\omega - (\pi/M)}^{\omega + (\pi/M)} h(\theta) d\theta \quad \dots\dots (3.3.93)
 \end{aligned}$$

$E\{\hat{h}(\omega)\}$ adalah rata-rata nilai $h(\theta)$ sepanjang interval $2\pi/M$ yang terpusat pada ω . Jika M terlalu kecil, maka ω_1 dan ω_2 akan tergabung dalam $\hat{h}(\omega)$. Untuk memisahkannya, dipilih M yang cukup besar sedemikian hingga lebar $w_N(\theta)$ memenuhi

$$2\pi/M \leq |\omega_2 - \omega_1|$$

Cara lain untuk memisahkan ω_1 dan ω_2 adalah memilih M sedemikian hingga

$$\text{lebar } w_N(\theta) \leq B_h \quad \dots\dots (3.3.94)$$

Tetapi jika lebar $w_N(\theta)$ sangat kecil, M harus sebesar mungkin yang berarti N akan sangat besar. Oleh karenanya agar optimal

$$\text{lebar } w_N(\theta) = \frac{1}{2} B_h \quad \dots\dots (3.3.95)$$

Perlu dicatat, parameter skala $\text{var}\{\hat{h}(\omega)\} = O(M/N)$ dan bias $\{\hat{h}(\omega)\} = O(1/M)$, sehingga

$$\begin{array}{ccccc}
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{bila } M \downarrow, & \text{varians } \downarrow, & \text{bias } \downarrow & & \\
 & & \uparrow & & \\
 M \downarrow, & \text{varians } \downarrow, & \text{bias } \downarrow & &
 \end{array}$$

3.3.11 PEMILIHAN PARAMETER WINDOW

Pemilihan parameter dalam penghitungan taksiran spektral, dibedakan menjadi dua :

3.3.11.1 JUMLAH DATA BELUM DITENTUKAN

Parameter yang akan ditentukan adalah N , M dan $\Delta\omega$. Penentuan tersebut melalui dua tahap, memilih M sedemikian hingga mempunyai derajat resolusi tertentu, kemudian menentukan N yang mempunyai derajat presisi tertentu.

B_h adalah 'critical bandwidth' dari $h(\omega)$. Penentuan nilai B_h adalah sebagai berikut,

- (i) Jika memisahkan dua puncak $h(\omega)$ pada frekuensi ω_1 dan ω_2 maka $B_h = |\omega_2 - \omega_1|$. Lebih umum, bila $h(\omega)$ mempunyai sejumlah puncak $\omega_1, \omega_2, \dots$ maka B_h adalah interval terkecil antara dua puncak yang berdekatan,

$$B_h = \min_i |\omega_{i+1} - \omega_i|.$$
- (ii) Jika $h(\omega)$ mempunyai sejumlah puncak (lembah) dan menginginkan taksiran $h(\omega)$ menghasilkan bentuk $h(\omega)$ secara menyeluruh maka $B_h = B_h$ adalah 'overall spectral bandwidth'.

Untuk derajat resolusi tertentu, memilih M sedemikian hingga

$$B_w = \alpha B_h \quad \dots \quad (3.3.96)$$

α adalah konstanta dalam range $0 < \alpha < 1$. Umumnya $\alpha = \frac{1}{2}$. Akan tetapi, jika lebih memusatkan penaksiran $h(\omega)$ di daerah

puncak dan menginginkan derajat resolusi tinggi, $\alpha = 1/3$ atau $\alpha = 1/4$.

Untuk window yang dipilih dan $\Delta_p(\omega)$, γ_p dan M yang tertentu, N sebagai fungsi $\lambda^{(r)}(\omega)$ ditentukan oleh persamaan (3.3.89), sehingga nilai N bervariasi terhadap ω . Sehingga jumlah data ditentukan oleh jumlah data yang diperlukan untuk menaksir $h(\omega_0)$ pada nilai ω yang menghendaki jumlah data terbesar. Jika $\lambda^{(r)}(\omega)$ diganti dengan batas bawah, nilai N yang akan memberikan derajat presisi tertentu. Bila $r = 2$, batas bawah $\lambda^2(\omega)$ adalah $\frac{1}{6} B_h$.

Untuk $WN(\theta)$ dengan pangkat karakteristik r ,

$$I_w = \int_{-\omega}^{\omega} k^2(u) du \quad \dots\dots (3.3.97)$$

$$B_w' = 2\sqrt{6} \{k^{(r)}\}^{1/r} \quad \dots\dots (3.3.98)$$

B_w' adalah nilai B_w untuk $M = 1$. B_w' disebut 'standart window bandwidth'.

$$\begin{aligned} \Delta_p(\omega) &= \gamma_p \sqrt{(I_w M/N)} + \frac{1}{M^2} \left\{ \frac{B_w'}{2\sqrt{6} \lambda^{(2)}(\omega)} \right\}^2 \\ &= \gamma_p \sqrt{(I_w M/N)} + \frac{1}{6M^2} \left\{ \frac{B_w'}{B_h} \right\}^2 \quad \dots\dots (3.3.99) \end{aligned}$$

Rumus tersebut hanya valid jika bentuk ke dua, nilainya kecil dibanding $\Delta_p(\omega)$. Didapatkan

$$N = \frac{\gamma_p^2 I_w M}{[\Delta_p(\omega) - (1/6 M^2) \{B_w'/B_h\}^2]^2} \quad \dots\dots (3.3.100)$$

Minimumisasi (3.3.99) terhadap M untuk mendapatkan M_{\min} , menghasilkan nilai N terkecil untuk $\Delta_p(\omega)$ yang ditetapkan. Jika M_{\min} lebih besar dari nilai M yang didapat dari tabel 3.2 (lampiran 1) maka N ditentukan dengan mengganti M_{\min} dengan M .

$$M_{\min} = \left\{ \frac{5}{6\Delta_p(\omega)} \right\} \frac{B_w'}{B_h} \quad \dots\dots (3.3.101)$$

Substitusi, menghasilkan

$$N_{\min} = \left(\frac{25\sqrt{5}}{16\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\chi_p^2}{\{\Delta_p(\omega)\}^{5/2}} \right) \frac{(B_w' I_w)}{B_h} \quad \dots\dots (3.3.102)$$

3.3.11.2 JUMLAH DATA TELAH DITENTUKAN

Parameter yang akan ditentukan adalah M . Keterbatasan pemilihan parameter dengan cara ini, tidak bisa mendapatkan $\hat{h}(\omega)$ dengan presisi dan resolusi yang dikehendaki. Bisa memilih M dengan derajat resolusi yang dikehendaki, tetapi presisinya tidak dapat dikontrol. Ini ekuivalen dengan menjaga bias tetapi tidak dapat mengontrol varians. Oleh karena M dipilih sedemikian hingga meminimumkan $\Delta_p(\omega)$ atau $\eta^2(\omega)$. Dalam hal ini, $\eta^2(\omega)$ lebih tepat digunakan. Minimumisasi $\eta^2(\omega)$ terhadap M akan menghasilkan M yang dibutuhkan.

Cara lain adalah dengan pendekatan derajat kebebasan, v . Dengan N yang ditetapkan, v yang tertentu, ditentukan M . Akan tetapi pendekatan ini mengabaikan bias dan tidak memperhitungkan besarnya B_h .

3.3.12 PROSEDUR ESTIMASI TANPA ADA INFORMASI AWAL TENTANG SPECTRAL BANDWIDTH

Pengetahuan tentang spectral bandwidth B_h penting untuk menentukan B_w , N dan M , sebagai fungsi N , yang tepat tanpa pengetahuan awal tersebut tidak ada metode estimasi yang memuaskan.

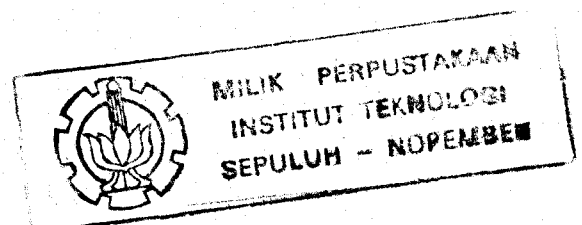
Dalam aplikasi fisik dan teknik, penentuan besarnya B_h atau batas bawah adalah dengan mempertimbangkan sifat-sifat fisik mekanisnya. Akan tetapi kesulitan terjadi untuk masalah-masalah yang tidak mempunyai interpretasi secara fisik, sehingga estimasi parameter-parameter dilakukan dengan pendekatan 'trial and error'.

Ada beberapa prosedur semi empiris yang digunakan untuk menaksir parameter bila tidak ada informasi awal tentang 'spectral bandwidth'. Jumlah data, N , adalah ditetapkan, sehingga masalahnya adalah meneliti B_w atau ekuivalen dengan menentukan M .

3.3.12.1 MENENTUKAN M

1. Menggunakan fungsi autokovarians sample ($R(S)$)

Telah diketahui bahwa 'spectral bandwidth' berbanding terbalik dengan $R(s)$. Karena $R(s)$ tidak diketahui maka ditaksir dengan $\hat{R}(s)$. Penentuan nilai M adalah dengan melihat 'rate of decay' plot $\hat{R}(s)$. Menghubungkan 'rate of decay' dari $\hat{R}(s)$ dengan 'spectral bandwidth' adalah benar-benar sulit,



tetapi jika taksiran spectralnya mempunyai jenis 'truncated' (truncated periodogram, Bartlett, Parzen dan Tukey) gambaran kasar nilai M bisa didapatkan taksiran M menyatakan titik dimana fungsi autokovarians sample terpotong dan M dipilih sedemikian hingga

$$R(s) \sim 0, \quad |s| > M$$

yaitu fungsi autokovarians pada dasarnya nol untuk lag yang lebih besar dari M . Bahayanya pendekatan ini adalah :

- a). $\hat{R}(s)$ umumnya menuju nol lebih lambat dari pada $R(s)$ juga adanya fluktuasi sampling $R(s)$ merubah fungsi, kecuali bila N besar di banding 'rate of decay' $R(s)$.
- b). Jika, misalnya $h(w)$ mempunyai bandwidth yang lebar dan puncak yang lebih kecil dengan bandwidth yang sempit, maka pengaruh puncak yang kecil akan terjadi dalam fungsi autokovarians sample dan nilai M yang dipilih hanya menggambarkan bandwidth puncak yang besar.

2. 'Window dosing'

Gagasan teknik ini adalah menetapkan nilai awal B_w yang besar (atau nilai M yang kecil) dan menghitung $\hat{h}(w)$. Selanjutnya secara berturut-turut menghitung $h(w)$ dengan nilai B_w yang semakin turun.

Nilai B_w yang besar akan menghasilkan $\hat{h}(w)$ yang lebih halus dan semakin turun, fungsi $\hat{h}(w)$ semakin 'erratic'. Dengan pengujian ini, dapat didekati titik dimana 'smoothing' agak di-

kurangi dan memungkinkan memilih nilai B_w yang tepat.

Jenkin's menyarankan memilih tiga nilai B_w yaitu B_w yang besar B_w' , B_w rata-rata, B_w'' dan B_w yang kecil, B_w''' dengan nilai M nya, M_1 , M_2 dan M_3 . Dilakukan pengujian untuk melihat apakah M_2 seharusnya dipilih atau apakah M lebih kecil M_1 atau lebih besar M_3 .

Teknik ini pada dasarnya pengetahuan awal tentang sifat-sifat s. d. f.

3. Memilih M sebagai proporsi N

Adalah menentukan M sebagai proporsi dari N , misalnya 20% atau 30%. Teknik mengabaikan sifat-sifat proses. Pemilihan dengan cara ini menggunakan pertimbangan intuitif yang sedikit dan membenaran secara teoritis adalah tehnik ini mengontrol varians relatif $\{\hat{h}(w)/h(w)\}$. Pengertian ini dengan pendekatan derajat kebebasan v . Nilai v tergantung pada N/M dan window yang digunakan.

3.3.12.2 PEMILIHAN INTERVAL FREKUENSI,

Pemilihan $\Delta \omega$ adalah untuk menguji $h(w)$ pada interval frekuensi tertentu. Estimasi $h(w)$ jenis truncated, berakhir pada $s = \pm M$ dan $\hat{h}(w)$ adalah polinomial trigonometrik derajat M . Teorema sampling menyatakan bahwa $\hat{h}(w)$ ditentukan nilainya pada himpunan frekuensi diskret $w_r = 2\pi r/M'$, $r=0, 1, \dots, (M'/2)$. $M' \geq (2M+1)$. Jika $K(1)=0$ (Bartlett, Tukey-Hanning, Parzen window) maka $\hat{h}()$ mempunyai derajat $(M-1)$ dan $M' \geq 2M-1$, sehingga

$\omega_r = \pi r/M$ dan $\Delta = \pi/M$.

Secara umum, Parzen menyatakan, jika $\Delta\omega = \frac{1}{2} B_w$ dan menguji $h(\omega)$ pada $\omega = \Delta\omega, 2(\Delta\omega), \dots, K(\Delta\omega)$, [$K = (\pi/\Delta\omega)$] maka nilai $h(\omega)$ pada frekuensi lain dihitung dengan interpolasi linier dan taksirannya mempunyai bias dan varians yang sama dengan menghitung secara langsung dari (3.3.45).

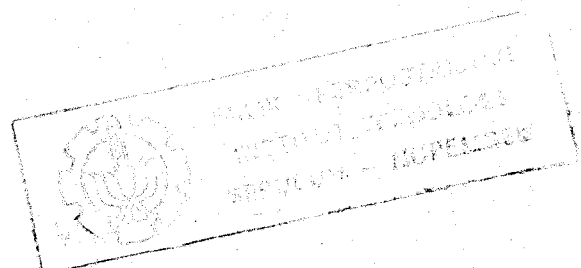
Pemilihan ini hanya merupakan pedoman untuk penaksiran spektral. Tidak dibatasi menguji $\hat{h}(\omega)$ pada frekuensi yang diinginkan.

3.3.13 PREWHITENING DAN TAPERING

Prewhitening dan tapering adalah teknik yang bertujuan memperbaiki ketelitian penaksiran spektral, dengan mentransformasi data sebelum penaksiran spektral.

3.3.13.1 PREWHITENING

Kebanyakan, kesulitan bentuk s.d.f. adalah menaksir s.d.f. yang mempunyai puncak tajam. Dalam hal ini, harus memilih 'window bandwidth' yang sangat kecil, yang menyebabkan M menjadi besar dan akibatnya N menjadi sangat besar, agar varians berada pada tingkat yang layak. Cara lain, jika N dan M ditetapkan, bias yang besar terjadi di sekitar puncak. Di lain pihak, jika proses mempunyai 'white spectrum' yaitu jika $h(\omega)$ konstan, maka dapat memilih M yang diinginkan tanpa mempengaruhi bias, karena



3.3.13.2 TAPERING

Tapering bertujuan mengurangi bias dalam taksiran spektral dengan mengurangi bias pada periodogram.

Bias pada periodogram adalah $O((\log N)/N)$ diabaikan dibanding bias $W_N(\theta)$ yang $O(1/M')$. Tetapi jika window tidak kontinyu, bias periodogram bisa dikoreksi dengan 'tapering' data. Untuk observasi X_1, X_2, \dots, X_N dibentuk $\{Y_t\}$,

$$Y_t = h_t X_t, \quad t = 1, \dots, N \quad \dots\dots (3.3.107)$$

$\{h_t\}$ disebut 'taper'. Untuk menaksir s.d.f. dari $\{X_t\}$, periodogram diganti dengan $|d_N(\theta)|^2$.

$$d_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Y_t - \tilde{X}) e^{-i\theta t} \quad \dots\dots (3.3.108)$$

dengan

$$\tilde{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h_t X_t \quad \text{dan} \quad N = 2\pi \sum_{t=1}^N h_t^2$$

dan Fejer Kernel, $F_N(\theta)$ diganti dengan

$$|H(\theta)|^2 = \frac{1}{2\pi N} \left\{ \frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right\}^2 \quad \dots\dots (3.3.109)$$

Pemilihan $\{h_t\}$ adalah sedemikian hingga $|H(\theta)|^2$ mempunyai side lobe lebih kecil daripada $F_N(\theta)$. Jika $h_t = 1$, untuk semua t , maka $Y_t = X_t$.

Untuk Tukey-Hanning Lag window, disusun 'cosine taper' atau 'Hanning taper', yaitu

$$E[h(\omega)] \sim \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) w_N(\omega - \theta) d\theta = h(\omega)$$

Metode prewhitening adalah 'flatten', s.d.f. dengan melewati X_t pada filter linier yang disusun sedemikian hingga output Y_t mempunyai s.d.f. yang 'nearly white'. Filter dinotasikan $\{g_u\}$ maka

$$Y_t = \sum_u g_u X_{t-u} \quad \dots\dots (3.3.103)$$

dan

$$h_y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 h_x(\omega) \quad \dots\dots (3.3.104)$$

dimana $\Gamma(\omega)$ adalah fungsi transfer filter,

$$\Gamma(\omega) = \sum_u g_u e^{-i\omega u} \quad \dots\dots (3.3.105)$$

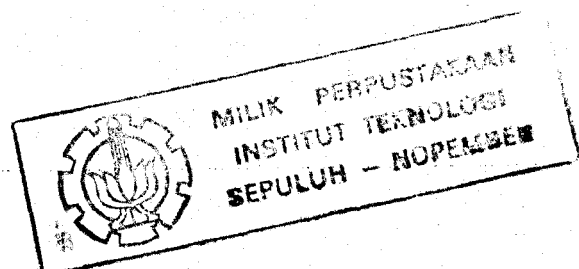
Kemudian menaksir $h_y(\omega)$ dari $\{X_t\}$ menggunakan metode standar dan memilih M. Taksiran $h(\omega)$ dicari dengan

$$\hat{h}_x(\omega) = |\Gamma(\omega)|^{-2} \hat{h}_y(\omega) \quad \dots\dots (3.3.106)$$

Pemilihan $\{g_u\}$ sedemikian hingga memenuhi

$$|\Gamma(\omega)|^2 \sim h_x^{-1}(\omega)$$

Untuk itu harus mempunyai pengetahuan awal tentang bentuk $h_x(\omega)$. Kesulitan ini dapat diatasi dengan membentuk 'pilot' analisis spektral.



$$h_t = \frac{1}{N} \{1 - \cos(2\pi t/N)\}, \quad t = 1, \dots, N \quad \dots\dots (3.3.200)$$

dan

$$|H(\theta)|^2 = \left\{ \frac{1}{N} D_M(\theta - \pi/(N/2)) + \frac{1}{N} D_M(\theta) + \frac{1}{N} D_M(\theta + \pi/(N/2)) \right\}^2 \quad \dots\dots (3.3.201)$$

Catatam, untuk lag window jenis 'truncated' dapat digunakan sebagai taper jika mengganti M dengan N/2 dan mengubah fungsi sehingga mempunyai nilai maksimum pada $t = N/2$.

Secara khusus, jika $h_t = a(t/N)$, $a(u)$ adalah fungsi kontinyu yang menuju nol diluar interval $(0,1)$, maka varians $\hat{h}(\omega)$ adalah

$$\text{var}\{\hat{h}(\omega)\} \sim \frac{\{(1 + o(\omega, 0, \pi)) \frac{2\pi}{N} h(\omega)^2 \int_{-\pi}^{\pi} N^2(\theta) d\theta\} \left\{ \int_0^1 a^4(u) du \right\}}{\left\{ \int_0^1 a^2(u) du \right\}^2}$$

3.4 DISAIN UNTUK PROSES PARAMETER KONTINYU

Jika $X(t)$ diambil sampelnya pada Δt , $Y_t = X(t, \Delta t)$, mengabaikan 'aliasing error',

$$h_x(\omega) = \Delta t \cdot h_y^*(\omega, \Delta t), \quad |\omega| \leq \pi/\Delta t \quad \dots\dots (3.4.1)$$

Untuk N observasi Y_t , taksiran $h_x(\omega)$ adalah

$$\hat{h}_x(\omega) = \Delta t \cdot h_y^*(\omega, \Delta t) \quad \dots\dots (3.4.2)$$

Bias dan varians relatif $\hat{h}_x(\omega)$ sama dengan untuk $h_y^*(\omega)$, se-

hingga $\Delta_p(\omega)$, $\eta(\omega)$ pada $h_x(\omega)$ sama dengan pada $h_y^*(\omega)$ dan disain untuk $\hat{h}_x(\omega)$ sama dengan disain untuk $h_y^*(\omega)$.

Masalah satu-satunya, adalah mendapatkan informasi tentang 'bandwidth' dari $h_x(\omega)$. Jika $b_h^{(x)}$ adalah 'bandwidth' $\hat{h}_x(\omega)$ yang diukur dalam Hz dan $b_h^{(x)}$ diukur dalam radian/detik, maka

$$B_h^{(x)} = 2\pi b_h^{(x)}$$

dan

$$B_h^{(x)} = \Delta t B_h^{(x)} = 2\pi(\Delta t) b_h^{(x)}$$

3.5 FAST FOURIER TRANSFORM

Fast Fourier transform adalah algoritma yang digunakan untuk menghitung periodogram $I_{N, x-x'}^*(\theta)$ secara langsung dari data, secara cepat dan efisien. 'Finite Fourier transform' didefinisikan sebagai

$$s_x'(p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi N)}} \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-i\omega p t}, \quad p = 0, 1, \dots, (N/2) \quad \dots \dots (3.5.1)$$

dan periodogramnya

$$I_{N, x-x'}^*(\omega)_p = |s_x'(\omega)|^2 \quad \dots \dots (3.5.2)$$

dimana $x' = x - \bar{x}$.

3.5.1 ALGORITMA FAST FOURIER TRANSFORM

N observasi x_0, x_1, \dots, x_{N-1} , akan dihitung 'finite fourier transform',

$$d(\omega_p) = \sum_{t=0}^{N-1} x_t \exp(i\omega_p t), \quad p = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.5.3)$$

dimana $\omega_p = 2\pi p/N$. Untuk setiap p , pengujian $d(\omega_p)$ membutuhkan N perkalian dan penjumlahan, dan secara lengkap membutuhkan operasi sebanyak N^2 kali. Tetapi bila N dapat difaktorisasi dalam bentuk $N = rs$ (r dan s integer), maka operasi tersebut dapat dikurangi yaitu dengan menghitungnya dalam 2 tahap.

Setiap t dalam range $(0, N-1)$ dapat ditulis

$$t = rt_1 + t_0$$

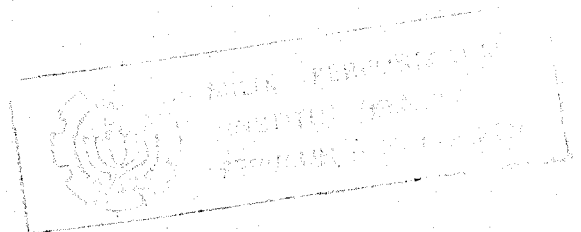
t_1 nilainya antara 0 sampai $(s-1)$ dan t_0 nilainya antara 0 sampai $(r-1)$. Dengan cara yang sama, p terletak dalam range $(0, N-1)$ ditulis sebagai

$$p = sp_1 + p_0$$

dengan nilai p_1 terletak dalam $(0, r-1)$ dan p_0 dalam $(0, s-1)$.

(3.5.3) dapat ditulis

$$\begin{aligned} d(\omega_p) &= \sum_{t_0} \sum_{t_1} x(rt_1 + t_0) \exp[2\pi i p(rt_1 + t_0)/N] \\ &= \sum_{t_0} \exp(2\pi i p t_0/N) \left\{ \sum_{t_1} x(rt_1 + t_0) \exp(2\pi i p t_1/s) \right\} \end{aligned}$$



$$= \sum_{t_0} \exp(2\pi i p t_0 / N) \left\{ \sum_{t_1} x(r t_1 + t_0) \exp(2\pi i p_0 t_1 / s) \right\} \quad \dots\dots (3.5.4)$$

Untuk jumlahan sepanjang t_1 (3.5.4) tidak tergantung pada nilai p_1 , hanya merupakan fungsi p_0 dan t_0 . Oleh karenanya

$$\sum_{t_1} x(r t_1 + t_0) \exp(2\pi i p_0 t_1 / s) = a(p_0, t_0) \quad \dots\dots (3.5.5)$$

dan

$$d(\omega_p) = \sum_{t_0} a(p_0, t_0) \exp(2\pi i p t_0 / N) \quad \dots\dots (3.5.6)$$

Pengujian $d(\omega_p)$ dibagi menjadi dua tahap :

- (i) Pengujian (untuk setiap p_0, t_0) transformasi (3.5.5) untuk s titik.
- (ii) Pengujian (3.5.6) untuk r titik.

Sekarang ada rs pasangan nilai (p_0, t_0) dan setiap $a(p_0, t_0)$ membutuhkan s operasi perkalian dan penjumlahan, sehingga semuanya menjadi rs^2 kali. Sedang (3.5.6) membutuhkan r operasi untuk setiap p dan ada N nilai p . Total operasi adalah

$$rs^2 + Nr = N(r + s)$$

yang lebih kecil daripada N^2 operasi.

Perhitungan di atas dapat diperluas jika N dapat difaktorisasi dalam bentuk

$$N = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_p$$

r_1, r_2, \dots, r_p adalah bilangan prima (tidak harus berbeda)). Langkah pertama untuk pengujian adalah dengan $r=r_1$ dan $s=(r_2, r_3, \dots, r_p)$ dan kemudian secara berturut-turut mengurangi pengujian (3.5.5) dengan mengambil $r=r_2$ dan $s=(r_3, \dots, r_p)$, dan seterusnya. Total operasi yang dibutuhkan adalah $N(r_1 + r_2 + \dots + r_p)$. Bila N dapat dibentuk $N=2^P$ maka jumlah total operasi adalah $2pN$ yaitu $[N(2 \log N / \log 2)]$ atau $O(N \log N)$ bila dibanding dengan N^2 operasi. Program komputer sering didasarkan pada algoritma ini. N jarang dapat difaktorisasi dalam 2^P , tetapi dengan cara menambah nol pada data akan menaikkan jumlah data sehingga berbentuk 2^P . Penambahan nol ini akan mempengaruhi nilai numerik 'finite fourier transform' tetapi tidak mempengaruhi frekuensi dimana transformasi diuji. Sehingga jika N menjadi N' maka transformasi akan diuji pada frekuensi $\omega_{p'} = 2\pi p' N'$. Ada yang menyarankan, bila panjang data naik secara artificial (dengan penambahan nol) data yang telah dimodifikasi, di'taper' pada kedua ujungnya sehingga menghaluskan transisi dari nilai bukan nol ke nilai nol.

3.5.2 PENGUJIAN 'WEIGHTED INTEGRALS OF PERIODOGRAM'

Bentuk standar taksiran spektral, didasarkan pada 'weighted integral' dari periodogram,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} I^*(\theta) W(\omega) d\omega \quad \dots \quad (3.5.7)$$

Menggunakan (3.3.16), bisa ditulis

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} R(s) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\omega} W(\omega) d\omega \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) R(s) \quad \dots\dots (3.5.8)
 \end{aligned}$$

$\lambda(s)$ adalah koefisien ke s ekspansi deret Fourier dari $W(\omega)$ dalam interval $(-\pi, \pi)$. Dengan

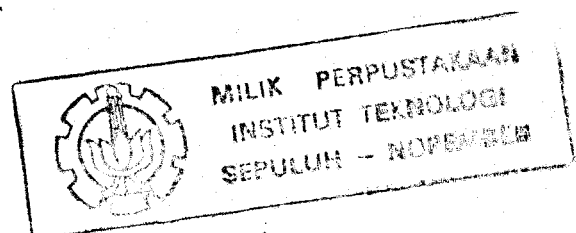
$$R(r) = \frac{2\pi}{2N-1} \sum_{p=-(N-1)}^{(N-1)} I^*(\omega_p') \exp(i\omega_p' r) \quad \dots\dots (3.5.9)$$

(3.5.7) menjadi

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2\pi}{2N-1} \sum_{p=-(N-1)}^{(N-1)} I^*(\omega_p') \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) \exp(i\omega_p' s) \right\} \\
 &= \frac{2\pi}{2N-1} \sum_{p=-(N-1)}^{(N-1)} I^*(\omega_p') W(\omega_p') \quad \dots\dots (3.5.10)
 \end{aligned}$$

dimana $\omega_p' = 2\pi p/(2N-1)$, $p = 0, \pm 1, \dots, (N-1)$.

Hasil ini adalah 'exact'. Demikian juga bila $\omega_p' = 2\pi p/P$, $P \geq (2N-1)$. Dalam (3.5.8) terdapat asumsi bahwa koefisien Fourier dari $W(\omega)$ menghilang untuk $|s| \geq N$. Tetapi jika $W(\omega)$ mempunyai koefisien tidak nol untuk $|s| \geq N$, hasilnya masih valid karena nilai I hanya tergantung pada nilai $\lambda(s)$ untuk $|s| \leq (N-1)$.



3.5.3 PENGUJIAN TAKSIRAN SPEKTRAL DENGAN PENJUMLAHAN PADA FREKUENSI DISKRET

Dari (3.3.49) dapat ditulis kembali

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I^*(\theta) W_N(\omega - \theta) d\theta \quad \dots\dots (3.5.11)$$

Dengan (3.5.8) $\hat{h}(\omega)$ dihitung dalam bentuk

$$\hat{h}(\omega) = \frac{2\pi}{2N-1} \sum_{p=-(N-1)}^{(N-1)} I^*(\omega_p') W_N(\omega - \omega_p') \quad \dots\dots (3.5.12)$$

Pada pengujian $\hat{h}(\omega)$ perlu menambah $(N-1)$ nol pada data agar mendapatkan ordinat periodogram pada $\omega_p' = 2\pi p/(2N-1)$.

Dengan cara lain, jika menggunakan algoritma standar dan mendapatkan ordinat periodogram pada $\omega_p = 2\pi p/N$, (3.5.9) diaproksimasi dengan menghitung $\hat{h}(\omega)$ dalam bentuk

$$\hat{h}(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{p=-(N/2)}^{(N/2)} I^*(\omega_p) W_N(\omega - \omega_p) \quad \dots\dots (3.5.13)$$

dan hasilnya cukup tepat. Jika $W_N(\theta)$ adalah jenis truncated, maka (3.5.9) merupakan polinomial trigonometrik derajat $(M-1)$ dan dapat ditulis sebagai jumlahan pada frekuensi $\omega_p' = 2\pi p/P$, $P \geq (2M-1)$ sehingga jika $M \leq \frac{1}{2}(N+1)$ maka (3.5.13) merupakan pernyataan yang tepat untuk $\hat{h}(\omega)$.

BAB IV

PENGUMPULAN, ANALISIS DATA DAN PEMBAHASAN

4.1 PENGUMPULAN DATA

Studi ini dilakukan untuk Teluk Ratai, Lampung Selatan, bulan oktober tahun 1987. Pencatatan tinggi gelombang laut dilakukan pada kedalaman 10 sampai 15 meter, menggunakan alat 'wave recorder DW3' buatan Jepang.

Gelombang Teluk Ratai relatif tenang. Pencatatan tinggi gelombang setiap 2 jam selama 10 menit dianggap telah mewakili proses sebenarnya. Catatan yang dihasilkan berupa proses yang kontinyu. Untuk keperluan analisis (bab 3.3.1) proses yang kontinyu dirubah menjadi proses yang diskret. Karena ini merupakan studi awal untuk Teluk Ratai, maka tidak ada informasi awal tentang karakteristik gelombangnya. Oleh karena itu pula belum dapat memenuhi syarat pemilihan Δt dalam bab 3.3.7. Interval waktu yang digunakan pada studi ini adalah 1 menit dan didapatkan 2000 data.

Data tinggi gelombang laut yang didapat bukan nilai yang sebenarnya, sehingga perlu ditransformasi. Ada 2 jenis transformasi sesuai dengan penyetelan alat yaitu high order dan low order. Untuk data ini akan ditransformasikan pada high order. P adalah periode gelombang yang sebenarnya dan p adalah periode dari kertas rias.

$$P = p \times 2 \times 2.2.4$$

(4.1.1)

dalam detik. Sedang, H, tinggi gelombang yang sebenarnya dan h adalah tinggi gelombang dari kertas pias,

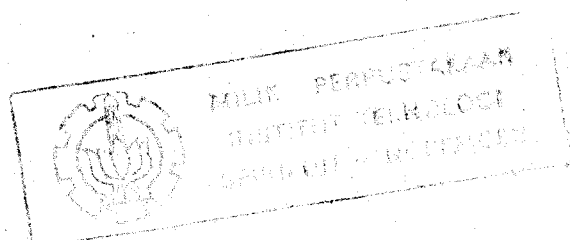
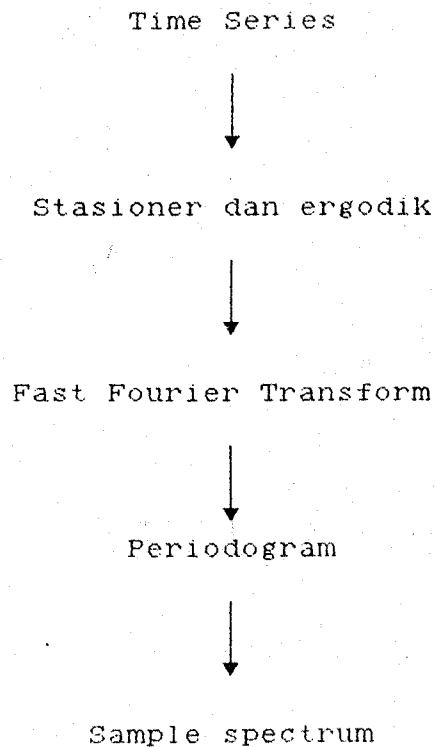
$$H = (43 \times 044 \times h \times \cosh 2\pi h/L) \text{ cm}$$

(4.1.2)

$\cos. 2\pi h/L \sim P/\text{kedalaman}$. Nilai $\cos 2\pi h/L$ telah ditabelkan untuk periode tertentu, (lampiran 3). Sedang data tinggi gelombangnya pada lampiran 2.

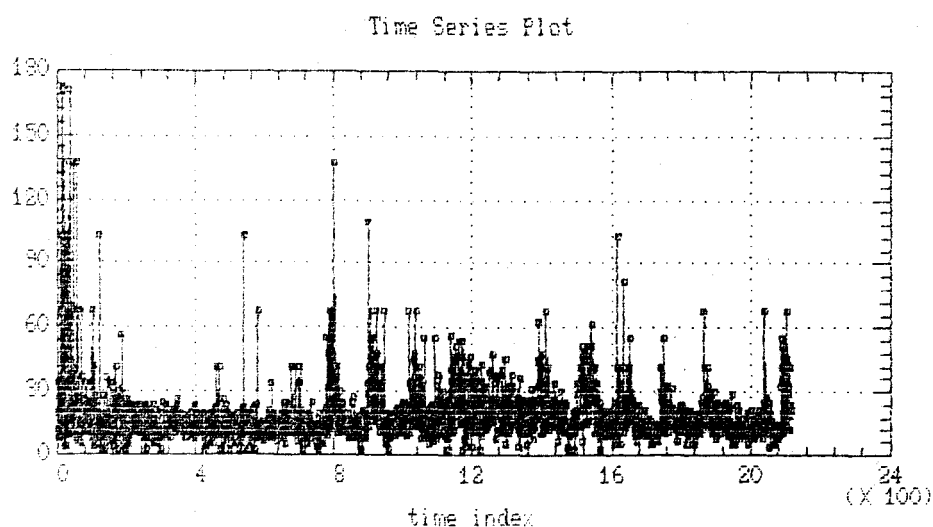
4.2 ANALISIS DATA

Analisis spektral terhadap amplitudo gelombang Teluk Ratai dilakukan tanpa ada informasi awal. Prosedur analisis ini dapat diringkas sebagai berikut :

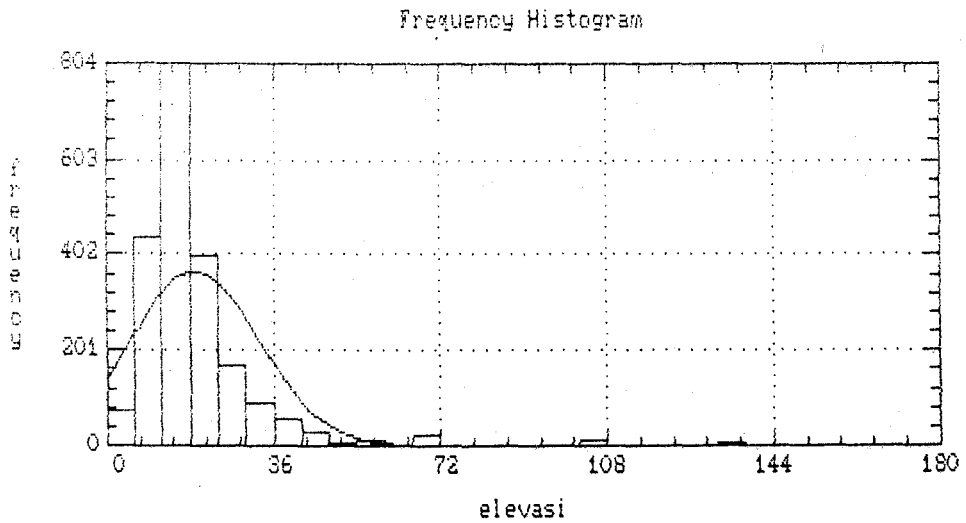


Penyusunan time series, terutama proses kontinyu yang harus diubah menjadi proses diskret, yang penting diperhatikan adalah interval waktu. Interval waktu harus cukup kecil untuk menghindari 'aliasing effect' dan untuk menghindari kehilangan informasi yang penting. Untuk Teluk Ratai interval waktu 1 menit adalah cukup kecil. Plotnya disajikan padaa gambar 4. 1.

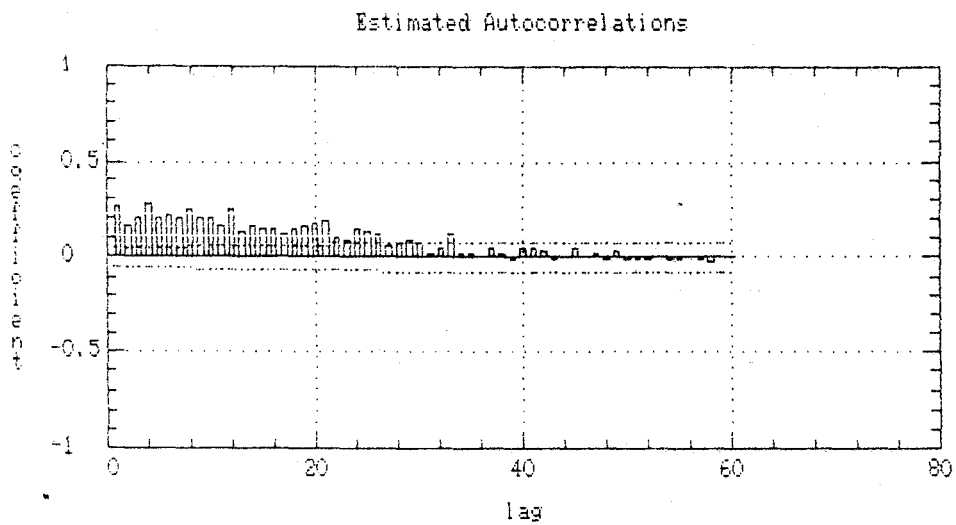
Agar dapat dianalisis spektral, suatu proses harus merupakan proses yang stokastik. Gambaran lengkap proses yang stokastik adalah sangat kompleks. Disini yang dipentingkan adalah moment pertama dan kedua, yaitu mean dan autokovarians. Suatu proses random dikatakan stasioner apabila mean dan variansnya konstan dan dikatakan ergodik bila 'time average' mendekati 'ensemble average'.



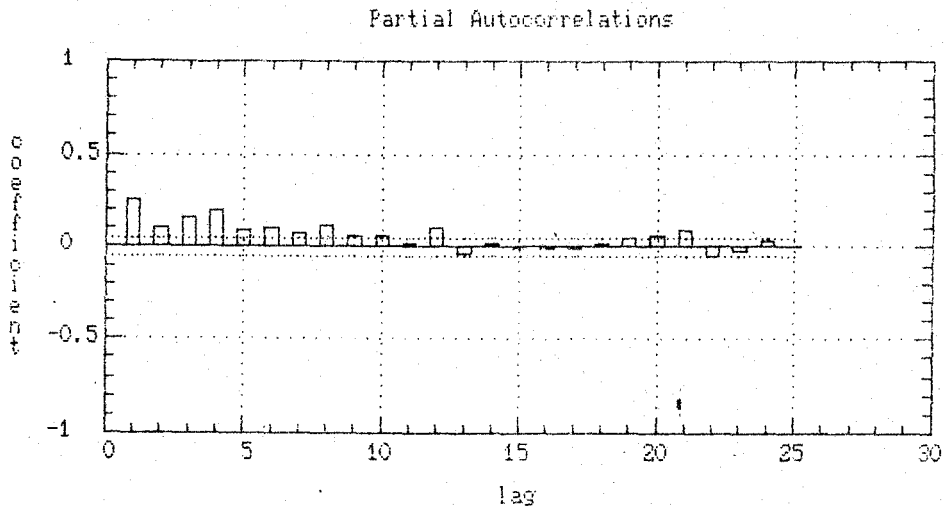
Gambar 4. 1 Plot time series tinggi gelombang Teluk Ratai.



Gambar 4.2 Histogram tinggi gelombang Teluk Ratai.



Gambar 4.3 Plot fungsi autokorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai.



Gambar 4.4 Plot fungsi autokorelasi parsial tinggi gelombang Teluk Ratai.

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa proses tidak stasioner yaitu meannya tidak sama dan variansnya tidak konstan. Bila ditinjau dari histogramnya (gambar 4.2) maka terlihat bahwa distribusinya menceng dan terlalu tinggi. Keadaan tidak stasioner ini lebih jelas lagi bila dilihat dari plot fungsi autokorelasinya (gambar 4.3). Nilai autokovariansnya banyak yang keluar batas kontrol dan turun menuju nol secara amat lambat. Demikian juga bila dilihat dari fungsi autokorelasi prsial pada gambar 4.4 yang nilainya banyak keluar batas kontrol.

Syarat untuk dapat dianalisis spektral adalah stasioner. Keadaan tidak stasioner, misalnya ada trend atau seasonal, harus dihilangkan terlebih dahulu. Untuk

menghilangkannya banyak cara, tergantung pada pola time seriesnya, yaitu dapat berupa transformasi atau differens.

Untuk gelombang Teluk Ratai ini dilakukan beberapa alternatif. Alternatif pertama adalah melakukan differens data 1 kali. Misalnya data tinggi gelombang dinyatakan sebagai X_t . Karena mempunyai mean yang tidak konstan, data dapat dinyatakan dalam

$$X_t = \mu_t + Y_t$$

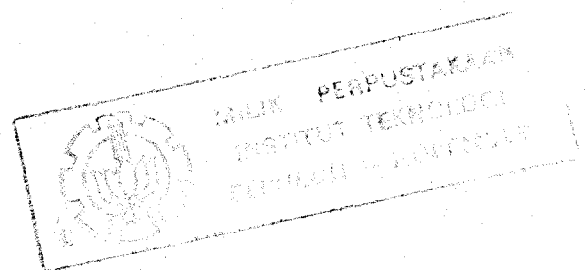
dimana μ_t adalah rata-rata X_t yang tergantung pada waktu dan Y_t adalah proses stasioner dengan mean nol. Jika μ_t adalah polinomial derajat $(q-1)$ dalam t ($\mu_t = \theta_1 + \theta_2 \cdot t + \dots + \theta_q \cdot t^{q-1}$) maka differens q kali pada μ_t akan menjadikannya nol. Sehingga jika $X_t' = \nabla^q X_t$ (dimana $\nabla = 1-B$ adalah operator differens standar) maka

$$X_t' = \nabla^q X_t = \nabla^q Y_t$$

Untuk differens 1 kali,

$$\begin{aligned} X_t' &= \nabla^1 X_t \\ &= (1-B) X_t \\ &= X_t - X_{t-1} \end{aligned}$$

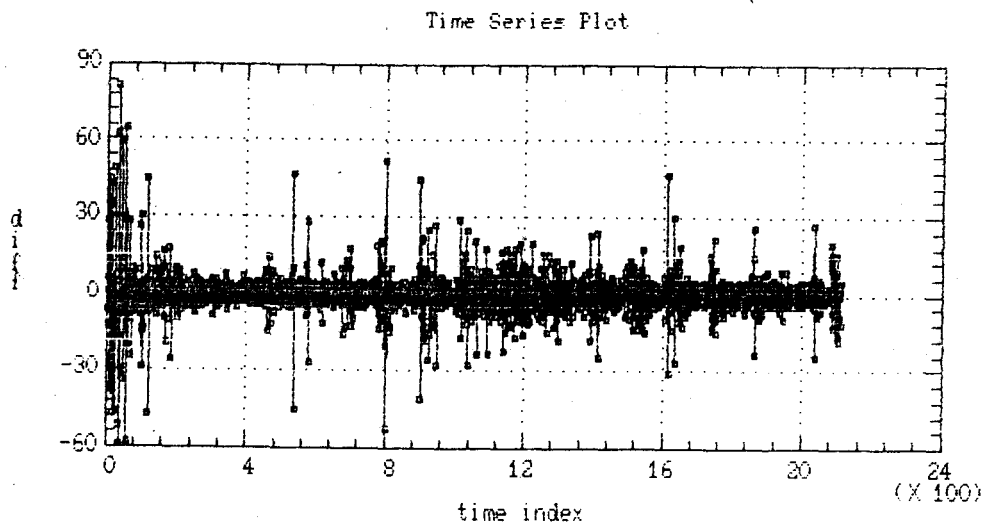
Plot hasilnya pada gambar 4.5. Melalui plot fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsialnya pada gambar 4.6 dan 4.7 dapat dinyatakan bahwa data telah stasioner. Pada fungsi autokorelasi, pada lag 3 nilainya nol (berada dalam



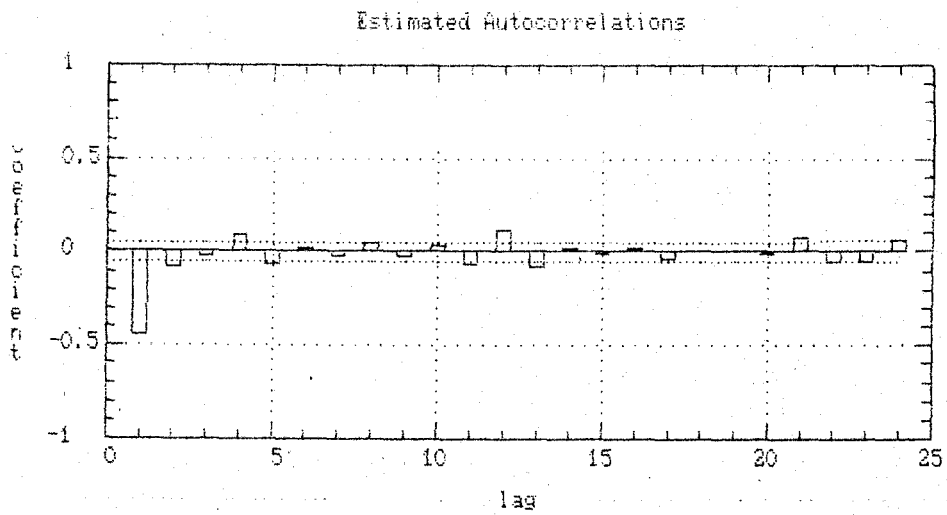
batas kontrol) dan turun cepat. Sedang pada fungsi autokorelasi parsial nilainya nol setelah lag 3.

Asumsi stasioner juga dipenuhi dengan melihat plot fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial 1/2 bagian pertama pada gambar 4.8, 4.9, mempunyai pola yang hampir sama dengan 1/2 bagian kedua pada gambar 4.10 dan 4.11.

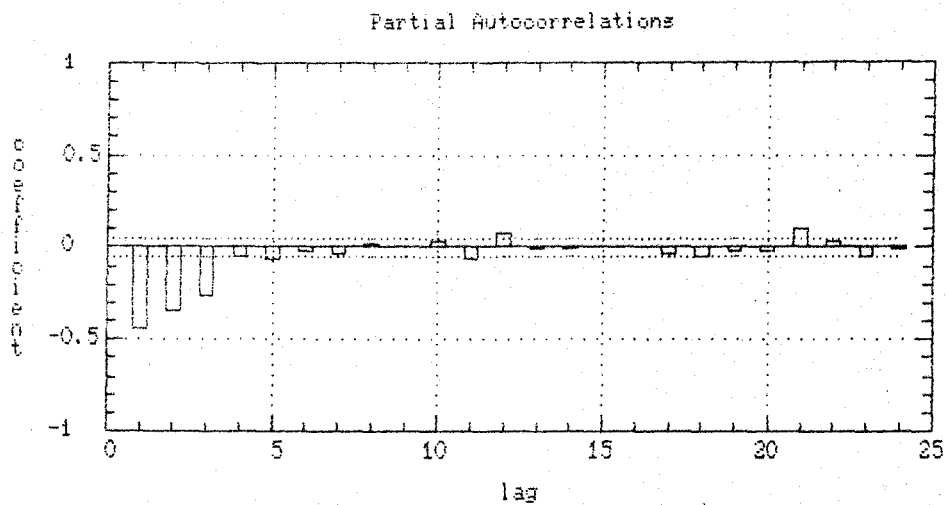
Alternatif kedua adalah melakukan transformasi rata-rata 4. Hal ini dilakukan dengan dasar bahwa pada fungsi autokorelasi (gambar 4.3), setiap lag kelipatan 4 nilainya lebih tinggi daripada 3 lag sebelumnya. Keadaan demikian ter-



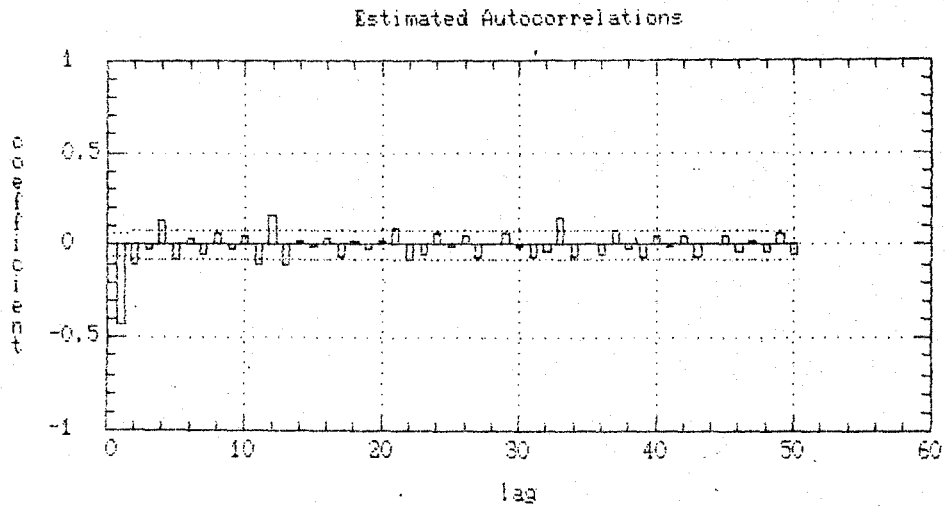
Gambar 4.5 Plot time series tinggi gelombang Teluk Ratai yang didifferens 1 kali.



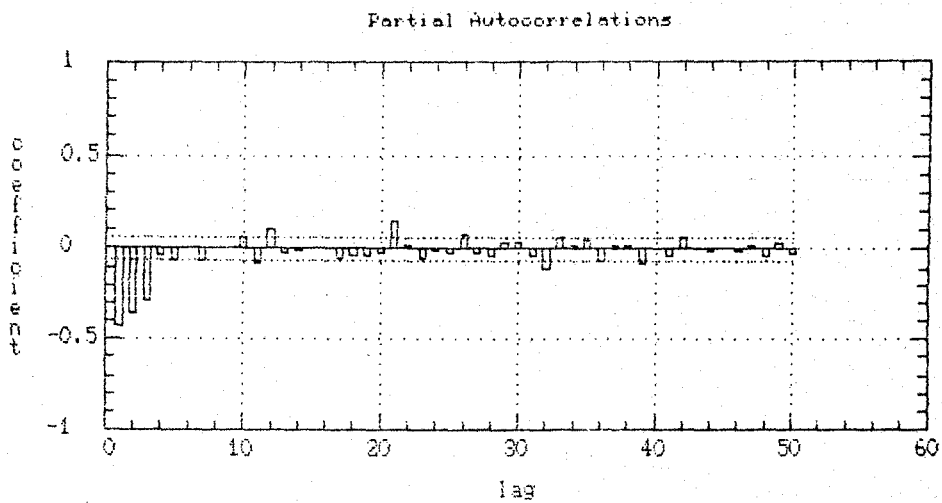
Gambar 4.6 Plot fungsi autokorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai yang didifferens 1 kali.



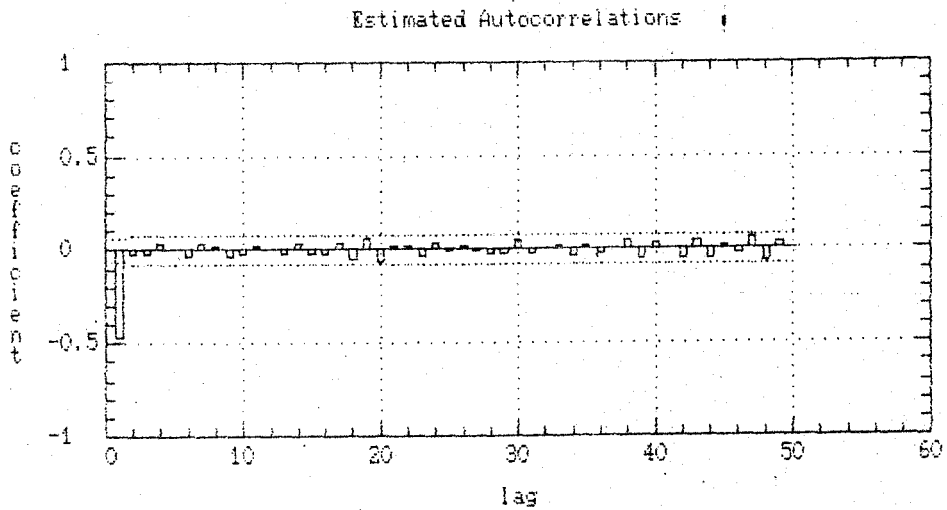
Gambar 4.7 Plot fungsi autokorelasi parsial tinggi gelombang Teluk Ratai yang didifferens 1 kali.



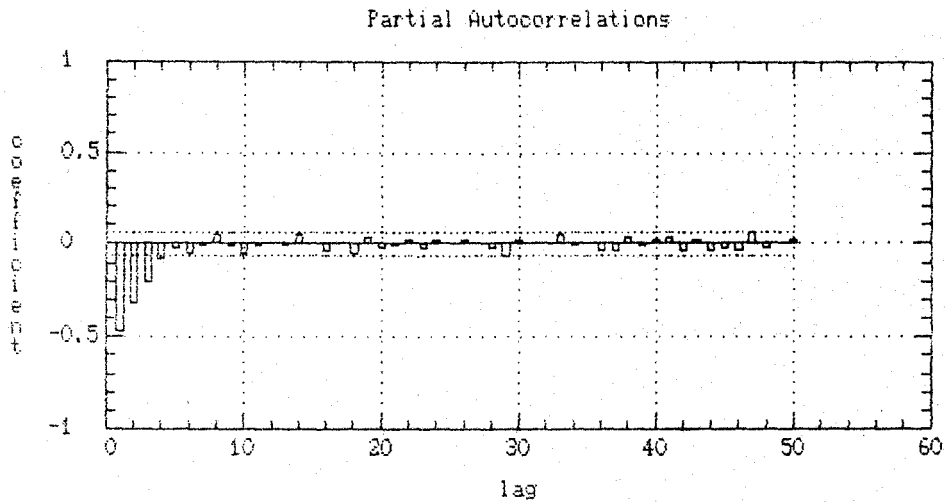
Gambar 4.8 Plot fungsi autokorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai 1/2 bagian pertama.



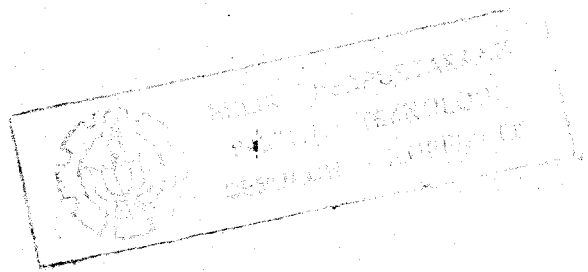
Gambar 4.9 Plot fungsi autokorelasi parsial tinggi gelombang Teluk Ratai 1/2 bagian pertama.



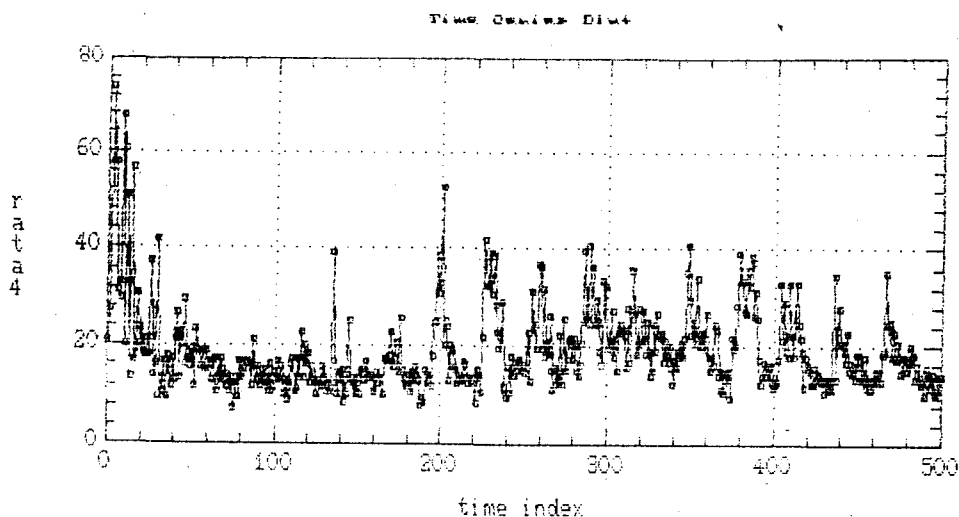
Gambar 4.10 Plot fungsi autokorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai 1/2 bagian kedua.



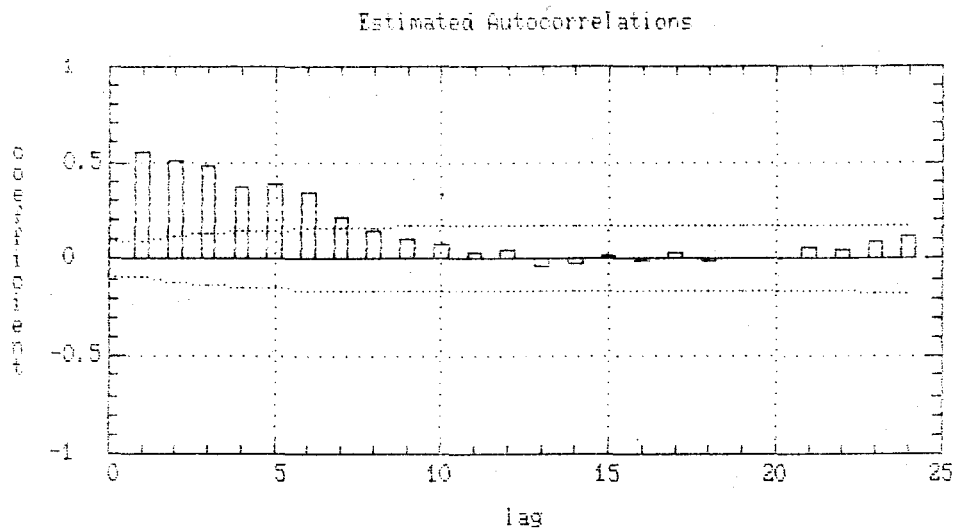
Gambar 4.11 Plot fungsi autokorelasi parsial tinggi gelombang Teluk Ratai 1/2 bagian kedua.



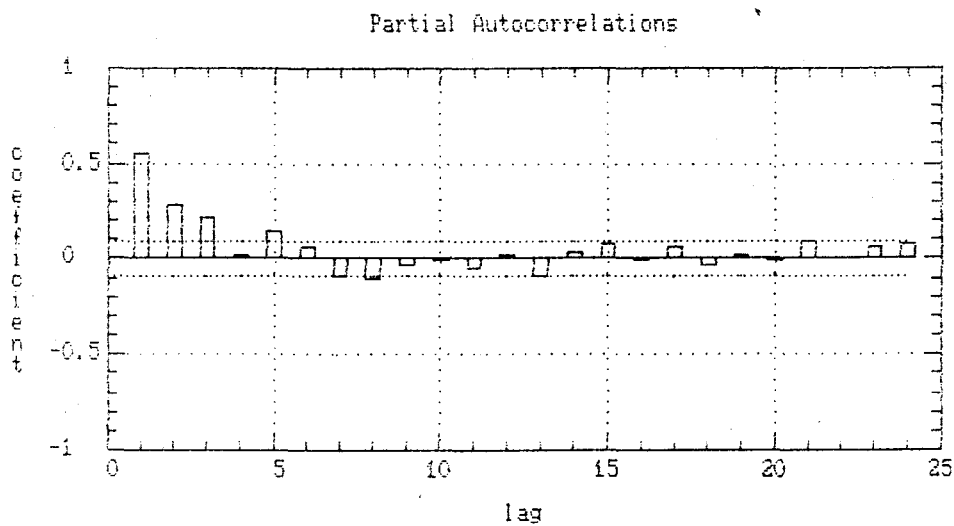
jadi 3 kali. Hasil rata-rata 4 diplot terhadap waktu pada gambar 4.12. Fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsialnya pada gambar 4.13 dan 4.14. Dari ketiga plot tersebut maka rata-rata 4 tidak stasioner. Oleh karena itu perlu ditransformasi lagi. Dalam usaha untuk mengkonstantakan varians, data ditransformasi $1/\sqrt{Z_t}$. Selanjutnya dari gambar 4.15, 4.16 dan 4.17 dikatakan bahwa proses masih belum stasioner. Usaha selanjutnya adalah mendifferens 1 kali pada gambar 4.18 dengan fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsialnya pada gambar 4.19 dan 4.20.



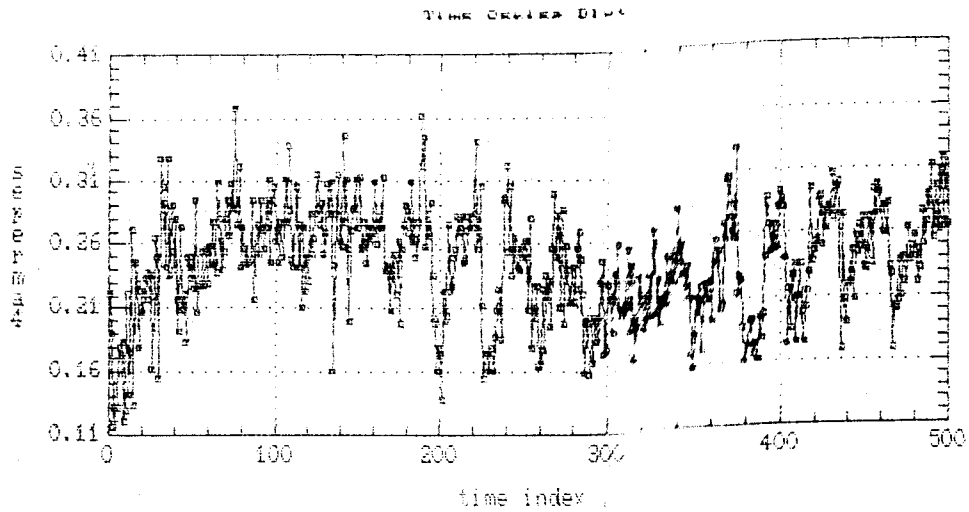
Gambar 4.12 Plot time series tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4.



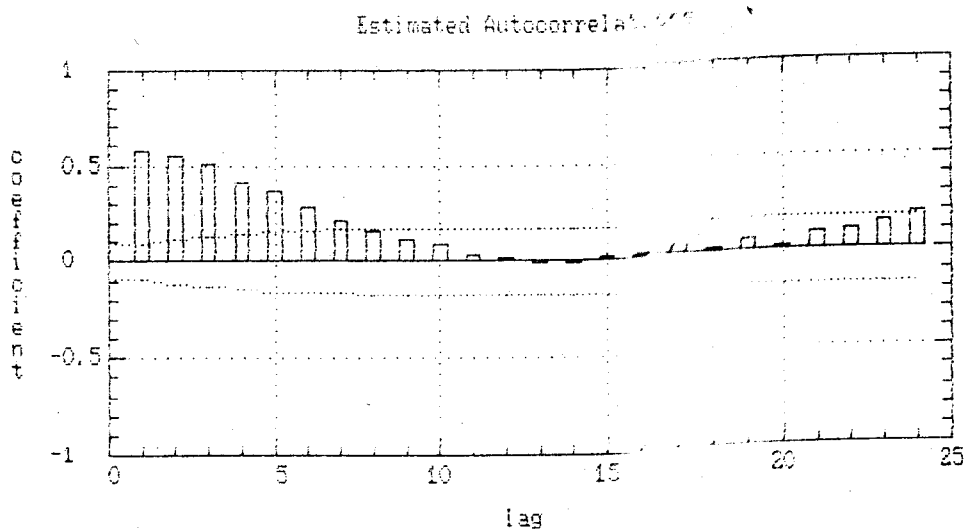
Gambar 4.13 Plot fungsi autokorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4.



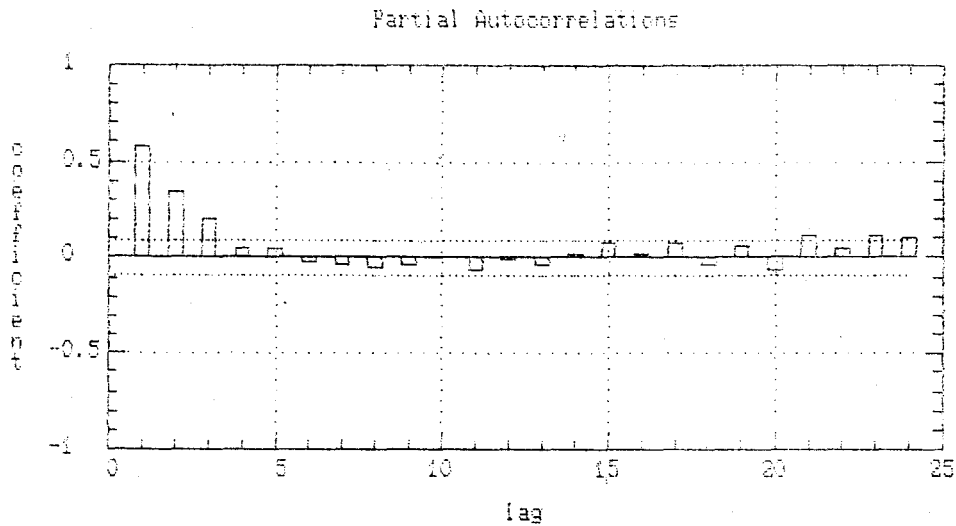
Gambar 4.14 Plot fungsi autokorelasi parsial tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4.



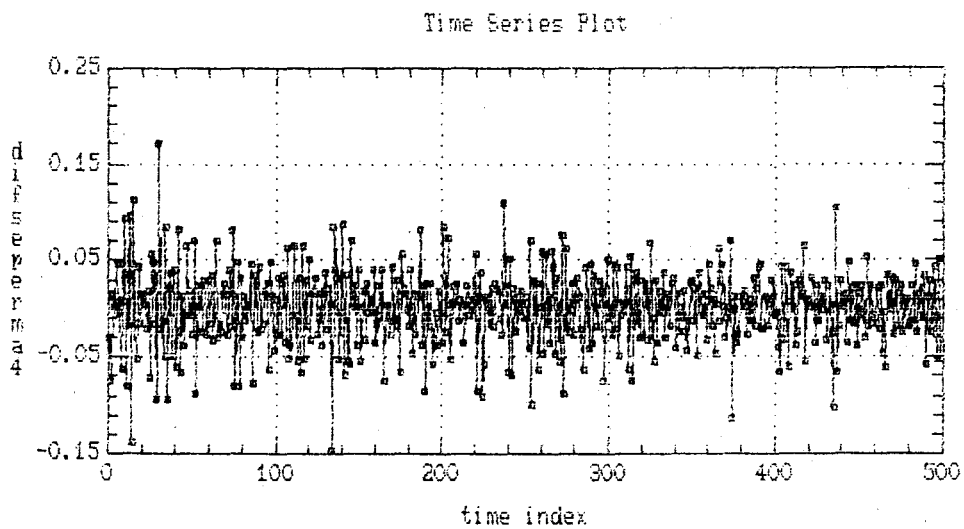
Gambar 4.15 Plot time Series tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4 dan diseper akar.



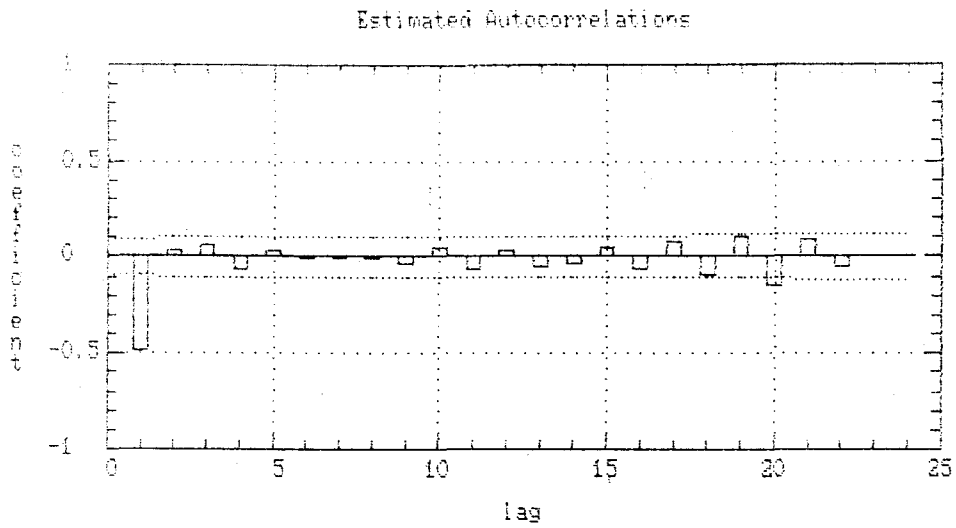
Gambar 4.16 Plot fungsi autokorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4 dan diseper akar.



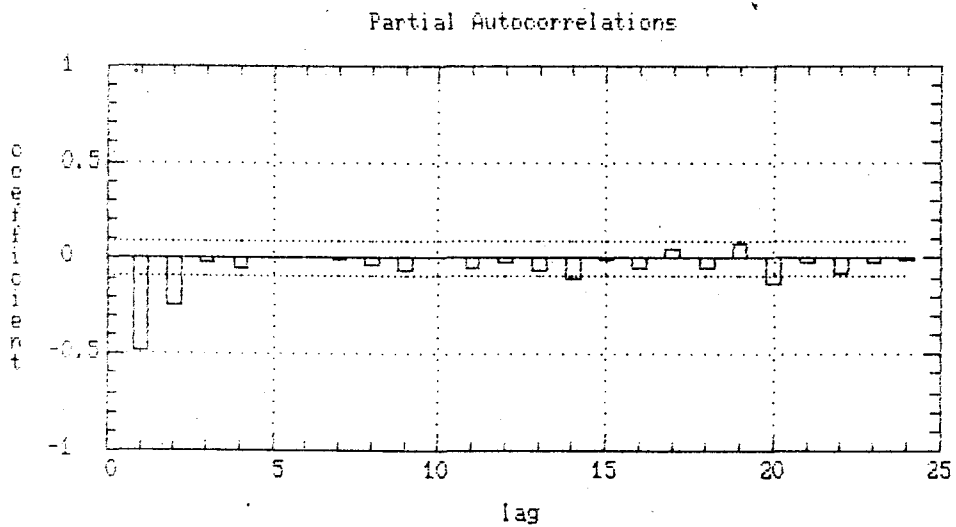
Gambar 4.17 Plot fungsi autokorelasi parsial tinggi gelombang Teluk ratai yang dirata-rata 4 dan diseper akar.



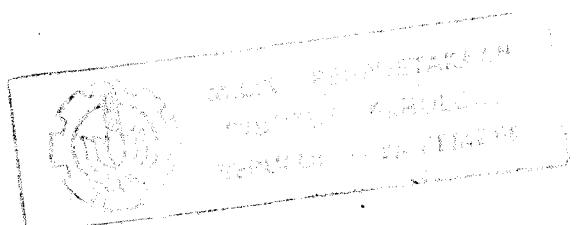
Gambar 4.18 Plot time series tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4, diseper akar dan didifferensi 1 kali



Gambar 4.19 Plot fungsi autoKorelasi tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4, diseper akar dan didifferens 1 kali.

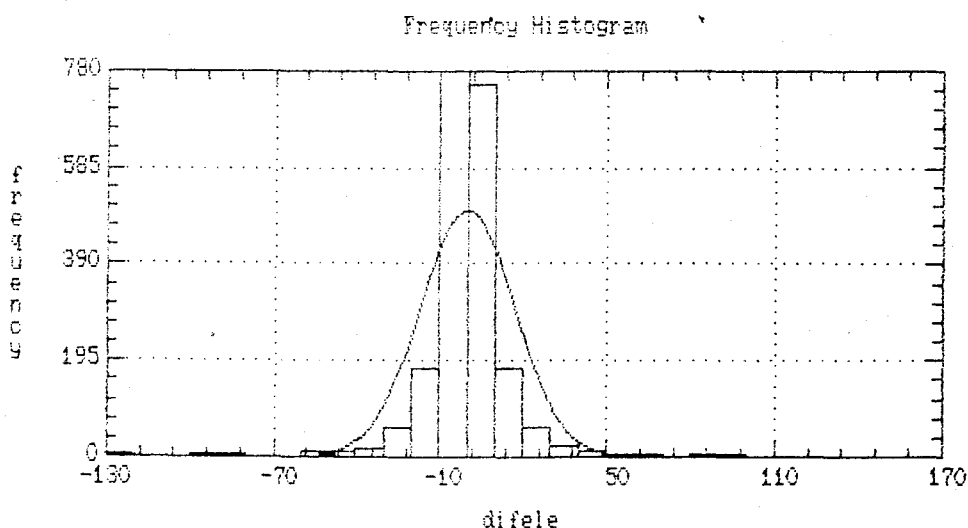


Gambar 4.20 Plot fungsi autoKorelasi parsial tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4, diseper akar dan didifferens 1 kali.

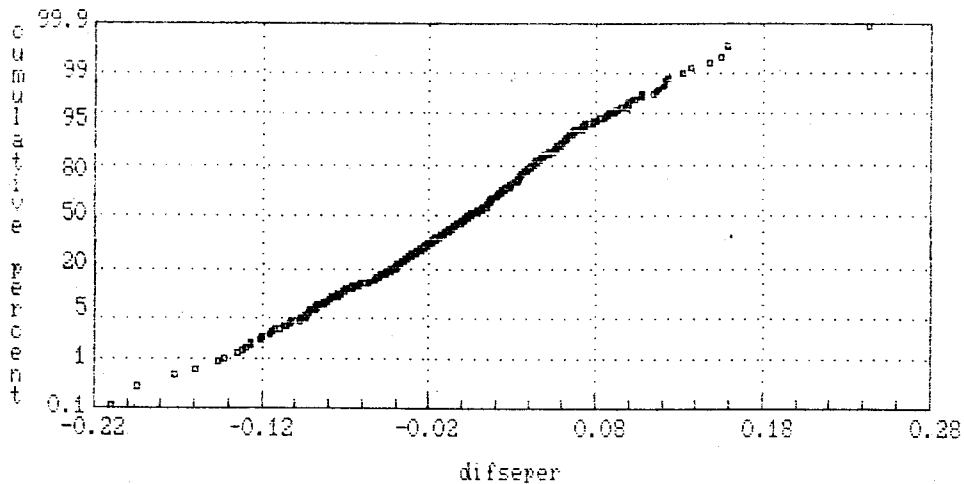


Gambar 4.19 dan 4.20 menyatakan bahwa data alternatif kedua telah stasioner, yaitu pada fungsi autokorelasi terjadi 'cut off' pada lag 2 dan lag-lag selanjutnya nol dan pada fungsi autokorelasi parsial, 'cut off' pada lag 3 dan lag-lag selanjutnya nol.

Untuk lebih meyakinkan, bahwa data benar-benar telah stasioner, data alternatif pertama dilihat histogramnya. Terlihat bahwa distribusi data telah simetris (gambar 4.21). Demikian juga pada data alternatif kedua, bila diplot normal (gambar 4.22) terlihat bahwa data membentuk garis lurus yang demikian itu dikatakan normal.



Gambar 4.21 Histogram tinggi gelombang Teluk Ratai yang didiferens 1 kali.

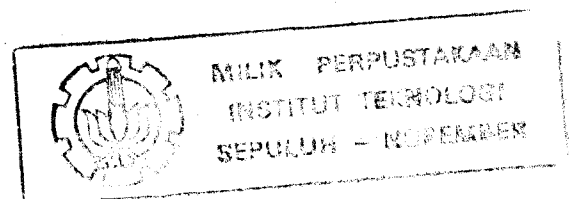


Gambar 4.22 Plot normal tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4, diseper akar dan didiferens 1 kali.

Data tinggi gelombang yang dianalisa disini merupakan 'single sample' sepanjang suatu interval waktu. Secara umum, rata-rata yang didapatkan akan berbeda dengan rata-rata secara 'ensemble'. Akan tetapi dengan Teorema Limit Central, bila sampel besar maka rata-rata 'single sample' akan sama dengan 'ensemble average'. Proses yang demikian disebut proses yang ergodik. Atau dengan kata lain, data tinggi gelombang cukup menunjukkan proses secara keseluruhan. Asumsi ini penting karena dalam praktek tidak mungkin melakukan pengambilan sampel sebesar populasi.

Analisis selanjutnya untuk data yang telah stasioner adalah analisis spektral 'frequency domain'. Analisis ini dilakukan dengan alasan sebagai berikut :

1. Gelombang laut adalah proses yang tidak teratur. Karena

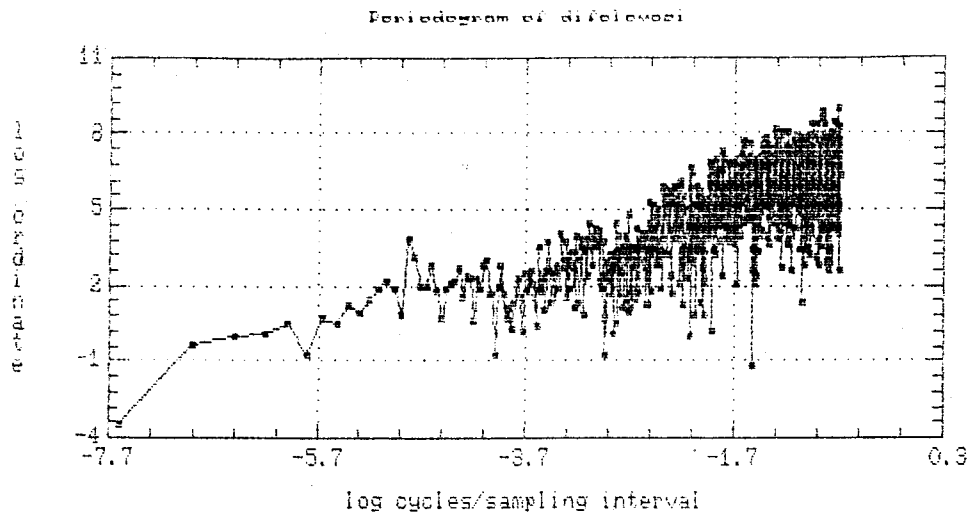


Ketidakteraturannya, gelombang laut hanya dapat diperhitungkan dengan menentukan total energi.

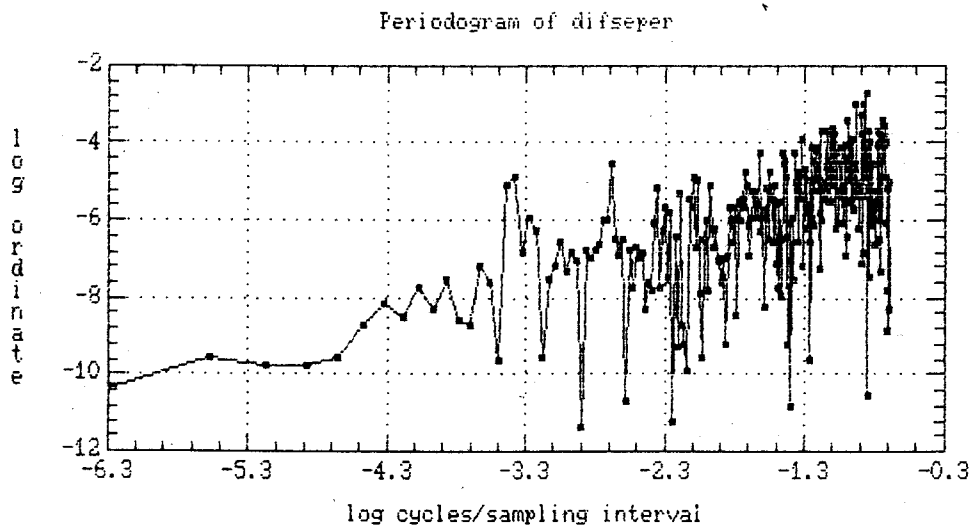
2. Distribusi energi yang terdapat pada gelombang Teluk Rantai serta karakteristiknya tentang frekuensi, periode serta panjang gelombang merupakan fungsi dari frekuensi maka pendekatan yang dilakukan adalah melalui frekuensinya (3.3.12).
3. Data tentang gelombang atau yang mempunyai phenomena semacam gelombang, merupakan model harmonik (3.3.18) dimana dalam proses terdapat bentuk trigonometrik periodik yang tersembunyi didalam 'noise process'. Dianalisis 'frequency domain' karena melalui fungsi periodogramnya dapat dilihat keperiodikannya.

Kuatnya alasan tersebut didukung oleh pola fungsi autokorelasi. Pada gambar 4.3 terlihat bahwa nilainya selalu naik lagi setelah turun dan akhirnya menyerupai bentuk sinus teredam. Demikian juga yang terlihat pada gambar 4.13. Pola yang demikian ini sulit bila dianalisis hanya dari fungsi waktu.

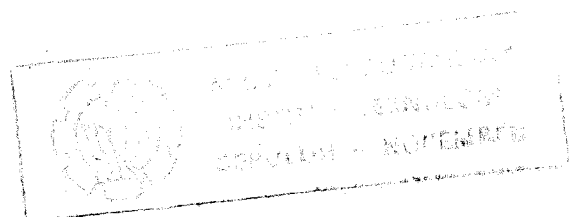
Penaksiran $h_x(\cdot)$ atau spektrum dilakukan dengan pertama kali mencari fungsi periodogramnya (3.3.46) data yang telah stasioner. Dengan algoritma 'Fast Fourier Transform' pada bab 3.5.1 didapatkan periodogram pada frekuensi $f_p = p/N = p/2000$, $p = 1, 2, \dots, 1000$. Untuk data alternatif pertama pada gambar 4.23 dan data alternatif kedua pada gambar 4.24.



Gambar 4.23 Periodogram tinggi gelombang Teluk Ratai yang didifferens 1 kali.



Gambar 4.24 Periodogram tinggi gelombang Teluk Ratai yang dirata-rata 4, diseper akar dan didifferens 1 kali.



Yang dapat dikatakan dari dua alternatif periodogram tersebut, keduanya mempunyai pola yang sama. Pada frekuensi rendah, nilai ordinatnya tinggi dan fluktuasinya besar. Sedang pada frekuensi tinggi, nilai ordinatnya rendah dan lebih serta relatif 'smooth'.

Telah dikatakan dalam bab 3 bahwa periodogram merupakan taksiran 's. d. f.' yang meskipun tak bias, akan tetapi mempunyai bentuk yang 'erratic' dan 'widly fluctuating'. Oleh karena itu taksiran 's. d. f.' tidak bisa hanya didapatkan dari periodogram. 'Weighted integral of periodogram' merupakan periodogram yang diberi bobot. Hal demikian dilakukan agar mendapatkan spektrum atau taksiran 's. d. f.' yang lebih 'smooth' dengan varians yang lebih kecil walaupun biasanya menjadi naik. Penetapan fungsi pembobot tersebut tergantung pada keperluan dan karakteristik persoalan.

Sebelum menaksir 'sample s. d. f' lebih dahulu menetapkan fungsi pembobot w_N atau window (bab 3.3.6). Dalam masalah ini dipilih Tukey-Hanning Window (3.3.62) dengan alasan sebagai berikut :

1. Mempunyai 'leakage' kecil atau hampir terkecil dibanding window yang lain.
2. Nilai $(B_w' \cdot I_w)$ -nya paling kecil. $(B_w' \cdot I_w)$ adalah ukuran efisiensi window, dalam arti semakin kecil $(B_w' \cdot I_w)$ maka semakin kecil pula 'minimum relatif mean square error'-nya.

3. Membutuhkan jumlah observasi paling sedikit untuk presisi yang sama.

Tukey-Hanning Window (3.3.62) adalah fungsi yang non-negatif, yaitu dalam hz

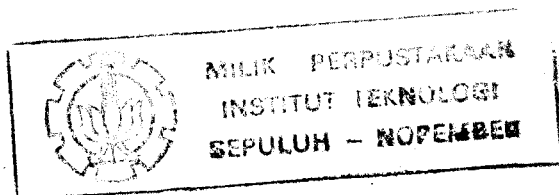
$$W(f_s) = \frac{1}{4} D_M(f_s - (\pi/M)) + \frac{1}{2} D_M(f_s) + \frac{1}{4} D_M(f_s - (\pi/M))$$

dimana

$$D_M(f_s) = \left\{ \frac{\sin [(M + .5) f_s]}{\sin (f_s/2)} \right\}$$

Hal penting selanjutnya adalah menentukan parameter M atau 'truncation point' yang ekuivalen dengan menentukan 'spectral bandwidth', B_h . Penentuan ini berhubungan erat dengan presisi taksiran spektral dan merupakan ukuran lebar puncak spektrum. Karena tidak ada informasi awal, sulit menentukannya secara matematis. Pendekatan yang dilakukan adalah melihat fungsi autokorelasi (bab 3.3.12). 'Spectral bandwidth' adalah berbanding terbalik dengan fungsi autokorelasi, yaitu 'spectral bandwidth' akan kecil jika fungsi autokorelasinya turun secara lambat, dan sebaliknya. Akan tetapi karena dikhawatirkan fungsi autokorelasi taksiran turun lebih lambat daripada fungsi autokorelasi yang sebenarnya.

Gelombang Teluk Ratai termasuk dalam jenis 'wind-wave'. Menurut Owen F. Hughes, gelombang yang demikian ini biasanya mempunyai spektrum yang 'narrow-banded', yaitu prosesnya terdiri dari komponen-komponen dimana frekuensinya didalam



range yang sempit, yang lebarnya kecil dibandingkan dengan besar 'peak'. Sehingga dalam hal ini dipilih M yang besar. Pemilihan M yang besar juga agar penaksiran spektrumnya lebih konsisten.

Penentuan parameter M juga erat kaitannya dengan penentuan derajat kebebasan. Untuk Tukey-Hanning Window terdapat hubungan

$$v = 8N / 3M$$

Besarnya derajat kebebasan yang diinginkan, tergantung pada tujuan pembentukan spektrum. v yang kecil akan menghasilkan resolusi yang baik tetapi kurang baik untuk peramalan. Sedangkan v yang besar, baik untuk peramalan atau pembentukan 'confidence bands' karena hasilnya lebih 'smooth'.

Berdasarkan pertimbangan-pertimbangan tersebut diatas maka dipilih beberapa nilai M. Untuk data alternatif pertama dipilih M sebesar 44 dan Sedang untuk data alternatif kedua dipilih M sebesar 100 dan 249.

'Sample s. d. f' adalah periodogram yang terbobot. Taksiran spektrum melalui periodogram yang didapat dengan algoritma 'Fast Fourier Transform' tanpa menambah nol pada data adalah

$$h(f) = 2\pi/N \sum_{p=-(N/2)}^{(N/2)} I^*(f_p) W_N(f - f_p)$$

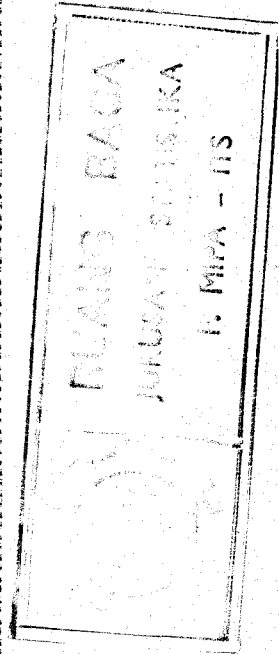
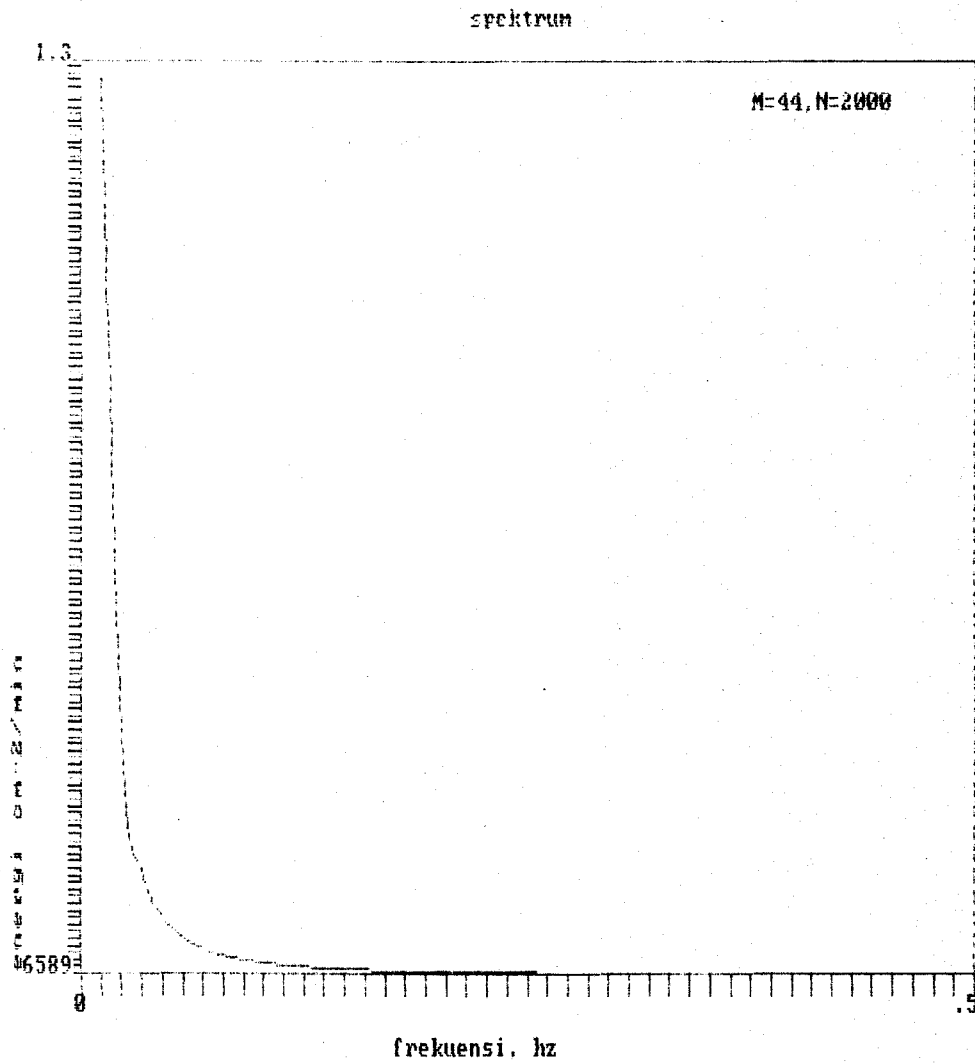
f adalah frekuensi dalam satuan hz dengan $\Delta f = 1/2M$. Penaksiran spektrum dilakukan pada range frekuensi $(-\frac{1}{2}\Delta t, \frac{1}{2}\Delta t)$ hz atau $(-\%, \%)$ hz. Alasannya, bila t dibatasi hanya pada keli-

patan Δt , maka Komponen-Komponen $X(t)$ yaitu proses dengan frekuensi $f+1/\Delta t$, $f+2/\Delta t$, $f+3/\Delta t$, ... akan kelihatan mempunyai frekuensi f . Frekuensi-frekuensi ini dikatakan 'alias' dari f dan setiap frekuensi diluar range $(-\frac{1}{2}\Delta t, \frac{1}{2}\Delta t)$ mempunyai alias didalam range tersebut. Frekuensi $\frac{1}{2}\Delta t$ disebut 'Nyquist frequency'. Disini pentingnya pemilihan interval waktu, yang harus cukup kecil sedemikian sehingga spektrum untuk frekuensi yang lebih tinggi dari $+\frac{1}{2}\Delta t$ diabaikan atau power proses pada frekuensi yang lebih tinggi dari $\frac{1}{2}\Delta t$ diabaikan. Dan karena spektrum merupakan fungsi yang genap maka disini dihitung nilai spektrum pada range $(0, \frac{1}{2})$.

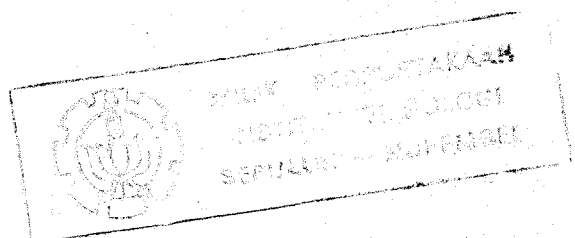
Untuk data yang didifferens atau Y_t , taksiran spektrum ditentukan dengan

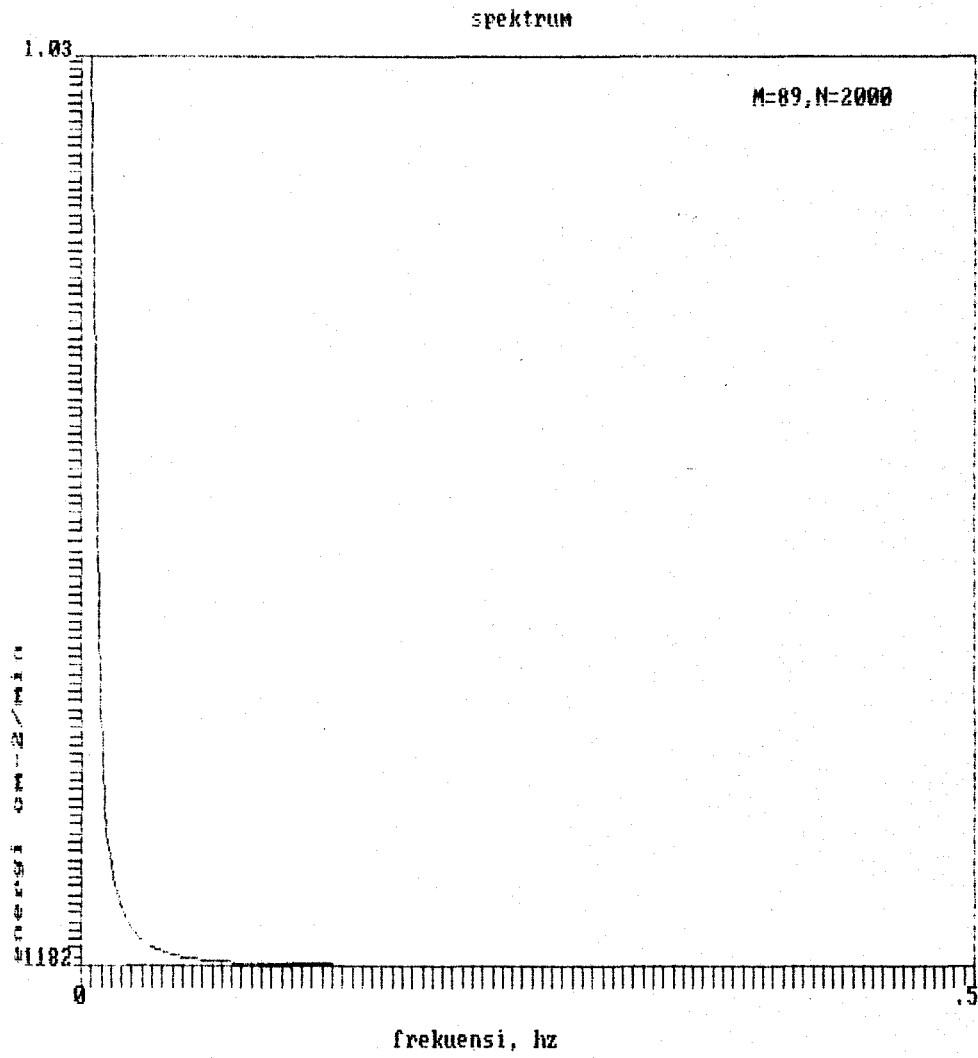
$$\hat{h}_Y(f) = 2^{-2q} \cdot (\sin^2(f/2))^{-q} \cdot \hat{h}_X(f)$$

Diplot terhadap frekuensi, spektrum untuk data alternatif pertama pada gambar 4.25 dan 4.26. Sedangkan untuk data alternatif kedua pada gambar 4.27 dan 4.28.

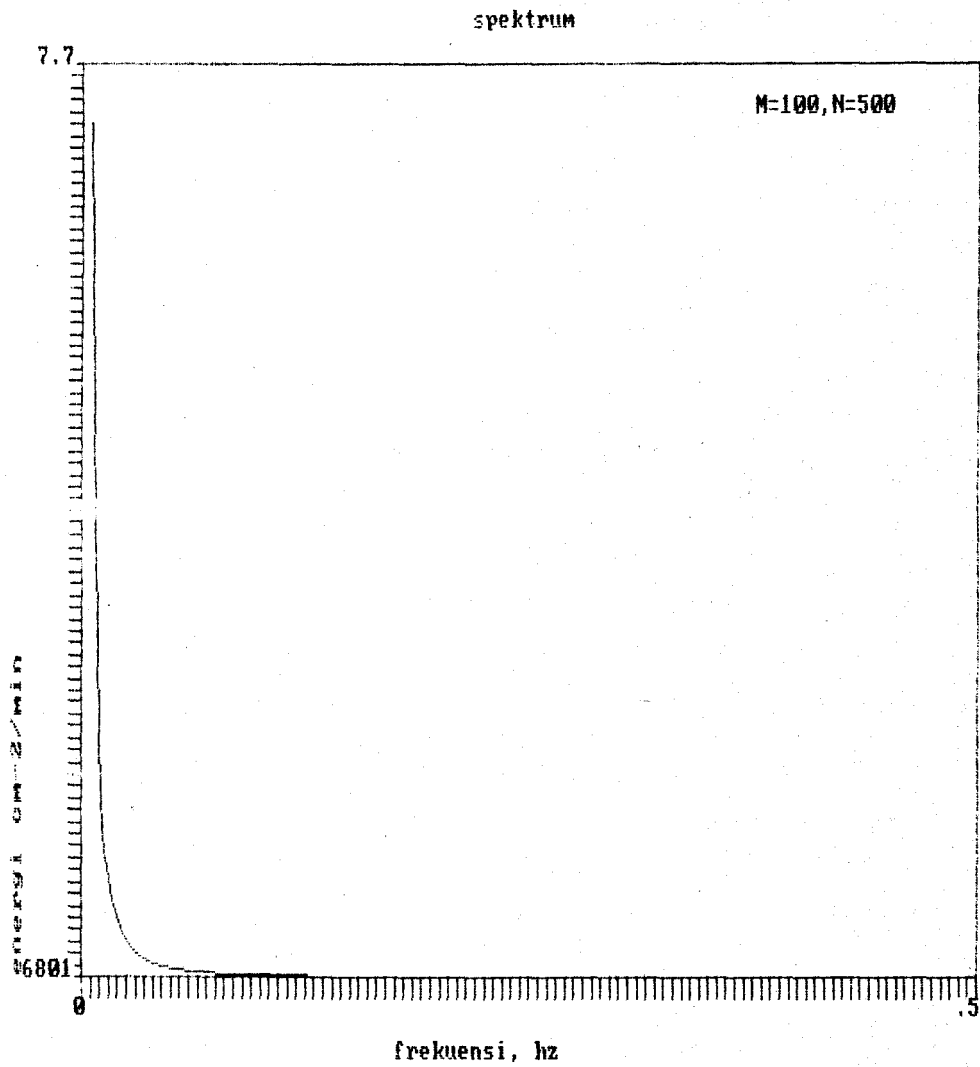


Gambar 4.25 Spektrum tinggi gelombang alternatif pertama dengan $M = 44$.

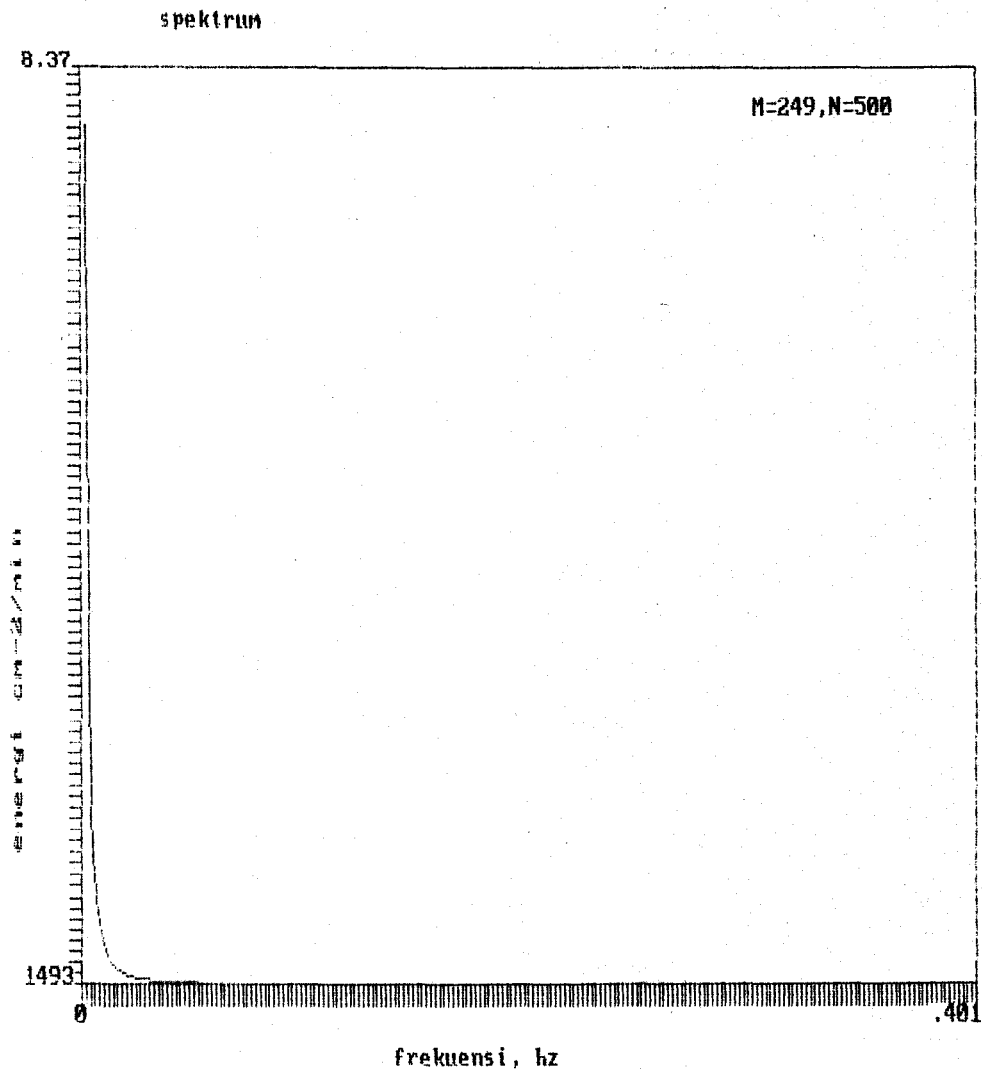




Gambar 4.26 Spektrum tinggi gelombang Teluk Ratai alternatif pertama dengan $M =$.



Gambar 4.27 Spektrum tinggi gelombang Teluk Ratai alternatif kedua dengan $M = 100$.



Gambar 4.28 Spektrum tinggi gelombang Teluk Ratai alternatif kedua dengan $M = 249$.

4.3 PEMBAHASAN

Tinggi gelombang Teluk Ratai pada bulan Oktober 1987 adalah tidak stasioner. Suatu saat relatif tinggi dan suatu saat amat rendah. Akan tetapi secara keseluruhan, tinggi gelombang relatif rendah. Hal ini sesuai dengan catatan mengenai keadaan angin selama survei. Kekuatan angin rata-rata lemah bahkan sering tenang. Hanya suatu saat saja kekuatan angin agak besar tetapi persentasenya kecil.

Derajat ketidakteraturan gelombang dapat dilihat dari bentuk histogramnya. Seperti terlihat pada gambar 4.2, distribusi tinggi gelombang Teluk Ratai, menceng, tidak normal. Tinggi gelombang yang rendah frekuensinya amat tinggi dan turun dengan cepat dan kemudian lambat untuk gelombang yang tinggi.

Ketidakstasioneran tinggi gelombang bulan oktober perlu dibuat stasioner atau teratur, untuk diketahui distribusi energinya. Dengan transformasi dan differens, didapatkan data yang stasioner. Untuk melihat efek transformasi dan differens terhadap data dilakukan beberapa alternatif penstasioneran. Alternatif pertama, data didifferens 1 kali. Alternatif kedua, data dirata-rata 4, diseper akar dan didifferens 1 kali. Gambar 4.19 dan 4.20 tentang log periodogram untuk masing-masing alternatif mempunyai pola yang sama. Ordinat yang tinggi serta fluktuasi yang besar untuk frekuensi yang tinggi dan ordinat yang lebih rendah dan lebih smooth untuk frekuensi yang rendah. Phenomena fluktuasi yang berbeda pada

frekuensi rendah dan tinggi ini dikhawatirkan disebabkan oleh interval waktu yang terlalu panjang.

Tukey-Hanning Window adalah fungsi pembobot yang digunakan pada penelitian sejenis di laut Atlantik Utara. Dipergunakannya disini karena alasan kebiasaan dan efisiensi secara matematis. Nilai 'truncation point' atau M yang semakin besar berarti 'spectral bandwidth'-nya semakin kecil. Dengan berbagai lebar spektral, spektrum pada gambar 4.25 sampai 4.28 menyatakan bahwa energi yang tinggi gelombang Teluk Ratai dipusatkan pada frekuensi yang rendah, yang berarti mempunyai panjang dan periode gelombang yang besar sekali. Berarti pula, gelombang Teluk Ratai mengandung energi yang besar bila panjang dan periode gelombangnya besar sekali.

Melalui persamaan untuk gelombang sinusoidal dibawah

$$\omega^2 = g k \tanh(kh)$$

dengan ω = frekuensi dalam radian = $2\pi f$ (dalam hz)

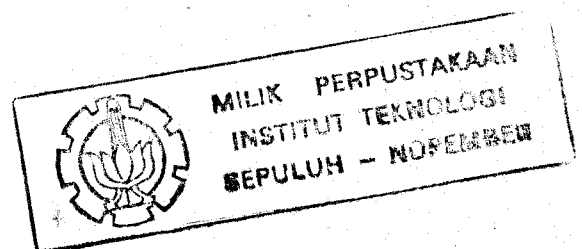
k = $2\pi/\lambda$ = 'wave number'

h = kedalaman perairan = 10 meter

g = percepatan gravitasi = 9.8 m/dt^2

λ = panjang gelombang

didapatkan panjang gelombang untuk frakuensi yang tertinggi yaitu untuk alternatif pertama dengan $M=44$ sebesar , untuk $M=89$ sebesar . Untuk alternatif kedua dengan $M=100$ sebesar , untuk $M=249$ sebesar .



Namun, mengingat jenis angin yang berhembus di atas permukaan Teluk Ratai adalah angin yang lemah, pemilihan interval waktu pencatatan tinggi gelombang yang kontinyu menjadi tinggi gelombang yang diskret sebesar 1 menit dikhawatirkan terlalu panjang sehingga menghasilkan pemusatan energi tinggi pada frekuensi rendah. Hal ini lebih dikuatkan oleh Priestley, bahwa sebenarnya jika sampel diambil pada Δt , maka akan kehilangan informasi yang mendetail tentang komponen-komponen frekuensi tinggi yang akan mempengaruhi kemampuan menaksir frekuensi spektrum tinggi.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Pada bab akhir ini disimpulkan bahwa :

1. Untuk periode yang relatif pendek, Khususnya pada bulan Oktober 1987, amplitudo gelombang Teluk Ratai tidak stasioner.
2. Tinggi gelombang Teluk Ratai menyebar disatu sisi, yaitu frekuensinya tinggi untuk tinggi gelombang yang rendah dan frekuensinya rendah untuk gelombang yang tinggi.
3. Energi terbesar gelombang Teluk Ratai terjadi pada gelombang yang frekuensinya rendah dengan panjang dan periode gelombang yang panjang sekali.
4. 'Spectral bandwidth' yang tepat belum bisa ditetapkan secara pasti, demikian juga dengan frekuensi, periode dan panjang gelombangnya; karena ini masih merupakan studi awal.

5.2 SARAN - SARAN

Adapun yang disarankan sehubungan dengan penelitian ini,

1. Penelitian ini terbatas untuk bulan Oktober 1987. Oleh karenanya hasilnya hanya berlaku untuk periode tersebut. Keterbatasan ini disebabkan cuaca setiap musim/bulan tidak sama, demikian juga perubahan arah dan intensitas angin. Agar penelitian yang sejenis lebih terlihat manfaatnya, periode pengambilan data lebih diperpanjang sehingga hasilnya dapat dipakai secara umum atau dilakukan untuk suatu periode sampai terjadi perubahan musim atau pada saat ada kejadian alam yang monumental.
2. Agar dapat menetapkan lebar 'spectral bandwidth' gelombang Teluk Ratai yang tepat perlu dilakukan percobaan dan penelitian beberapa kali.
3. Interval waktu 1 menit dikhawatirkan terlalu panjang sehingga didalam interval tersebut mungkin terjadi beberapa kali gelombang. Hal ini mengingat angin yang menimbulkan gelombang di Teluk Ratai adalah angin yang lemah. Untuk penelitian selanjutnya, interval waktu yang dipilih harus lebih pendek.
4. Hendaknya diupayakan alat yang lebih memadai sehingga memungkinkan pembacaan gelombang dengan interval waktu yang lebih pendek sehingga lebih tepat serta lebih teliti.

APPENDIKS A

$X(t)$ adalah fungsi non periodik (tetapi deterministik). Karenanya $X(t)$ tidak bisa dinyatakan dalam deret Fourier yang valid untuk semua t . Akan tetapi dengan menggunakan "trik standar" untuk mendefinisikan fungsi baru $X^*(t)$, yaitu agar $X(t)$ dapat dinyatakan dalam deret Fourier untuk interval tertentu, misalnya $(-T, T)$,

$$\begin{aligned} X_T^*(t) &= X(t), & -T \leq t \leq T \\ X_T^*(t+2pT) &= X_T^*(t), & p=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad \dots\dots (A.1)$$

maka $X_T^*(t)$ periodik dengan periode $2T$. Dinyatakan dalam deret Fourier,

$$X_T^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t), \quad \text{untuk setiap } n \quad \dots\dots (A.2)$$

dimana $f_n = n/2T$

$$b_0 = 0$$

Bila ditulis dalam bentuk eksponensial,

$$X_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2\pi i f_n t} \quad \dots\dots (A.3)$$

dimana nilai A_n sama dengan dalam (3.3.4), sedang

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T X(t) \cos(\pi n t / T) dt \quad \dots\dots (A.4)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T X(t) \sin(\pi n t / T) dt$$

(A.4) disubstitusikan dalam A_n , didapat

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T^*(t) e^{-2\pi i f_n t} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) e^{-2\pi i f_n t} dt \end{aligned} \quad \dots\dots (A.5)$$

$X(t)$ dan $X_T^*(t)$ identik pada interval $(-T, T)$, sehingga untuk $-T \leq t \leq T$,

$$X(t) \equiv X_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^T X(t) e^{-2\pi i f_n t} dt \right) e^{2\pi i f_n t} \partial f_n \quad \dots\dots (A.6)$$

$$\text{dimana } \partial f_n = f_n - f_{n-1} = \frac{1}{2} T$$

Bila $T \rightarrow \infty$ dan $\partial f_n \rightarrow 0$ — himpunan frekuensi diskret ($\dots f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots$) menjadi himpunan titik yang kontinyu — maka (A.6) menjadi

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(f) e^{2\pi i f t} df \quad \dots\dots (A.7)$$

dimana

$$p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad \dots\dots (A.8)$$

Bentuk (A. 7) tersebut merupakan pendekatan bentuk (A. 6). $p(f)$ disebut sebagai transformasi Fourier dari $X(t)$ dan (A. 7) adalah integral Fourier untuk $X(t)$. $X(t)$ dan $p(f)$ adalah simetris. (A. 7) dan (A. 8) dapat ditulis sebagai

$$p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \{ \cos 2\pi ft - i \sin 2\pi ft \} dt$$

$$= g(f) - ik(f) \quad \dots\dots (A. 8')$$

dan

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ g(f) \cos 2\pi ft + k(f) \sin 2\pi ft \} df$$

$$\dots\dots (A. 7')$$

(A. 7) dan (A. 8) dapat dinyatakan dalam bentuk 'angular frekuensi dengan $\omega = 2\pi f$.

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \dots\dots (A. 9)$$

dimana

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad \dots\dots (A. 10)$$

dengan catatan, $G(\omega) \equiv \sqrt{2\pi} \ p(\omega/2\pi)$.

APPENDIKS B

1. PARSEVAL'S RELATION

'Parseval's relation' untuk deret Fourier analog dengan untuk integral Fourier, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \quad \dots\dots (B.1)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) G^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

2. ENERGI TOTAL

Energi total dari $X(t)$ sepanjang interval $(-\pi, \pi)$ adalah $\int_{-\pi}^{\pi} X^2(t) dt$. Energi total proses sebanding dengan $(a_n^2 + b_n^2) = |A_n|^2$.

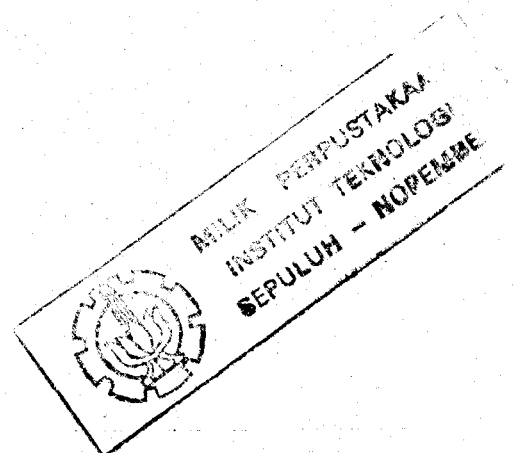
$$\begin{aligned} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} Y^2(s) \cos^2 ns + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} Y^2(s) \sin^2 ns ds \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \{Y^2(s) \cos^2 ns ds + Y^2(s) \sin^2 ns ds\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} Y^2(s) (\cos^2 ns + \sin^2 ns) ds \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} Y^2(s) ds \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} a_0^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt dt + \right. \\
&\quad \left. + b_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt \right\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} X^2(t) dt
\end{aligned}$$

dimana $Y(s) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns)$

$$s = \pi t/T$$

$$\begin{aligned}
X(t) \equiv Y(\pi t/T) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\pi t/T) \\
&\quad + b_n \sin(\pi t/T)]
\end{aligned}$$



APPENDIKS C

$h(\omega)$ sebenarnya adalah transformasi Fourier dari fungsi auto-kovarians. Dasar analisis Fourier menyatakan bahwa jika $F(\omega)$ adalah transformasi Fourier fungsi $f(t)$ maka $|F(\omega)|^2$ adalah juga transformasi Fourier dari 'convolution' $f(t)$ dengan dirinya sendiri, yaitu $|F(\omega)|^2$ adalah transformasi Fourier fungsi $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-t) du \right\}$. Hal ini digunakan hanya untuk fungsi yang deterministik.

Lemma C.1 :

$f(t)$, $g(t)$ adalah fungsi yang mempunyai nilai real, maka masing-masing mempunyai transformasi Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt \quad \dots\dots (C.1)$$

maka

$$F(\omega) G^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \quad \dots\dots (C.2)$$

dimana

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u-t) du \quad \dots\dots (C.3)$$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(u) g(u-t) du dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(u) g(u-t) du dt \right.$$

tetapi untuk setiap u

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(u-t)} g(u-t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega Y} g(Y) dy \\ &= G^*(\omega) \end{aligned}$$

yang independen dari u. ($y=u-t$)

Sehingga didapat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt = G^*(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} f(u) du \right\} = G^*(\omega) F(\omega)$$

Bila $f(t) \equiv g(t)$

$$|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \quad \dots\dots (C.4)$$

dimana

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-t) du \quad \dots\dots (C.5)$$

Teorema :

Bila $\{X(t)\}$ adalah proses stasioner dengan parameter yang kontinyu, dengan mean nol, mempunyai 'spectral density function' $h(\omega)$ yang ada untuk setiap ω dan fungsi autokovarians $R(\tau)$, maka $h(\omega)$ adalah transformasi Fourier dari $R(\tau)$

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} R(r) dr \quad \dots\dots (C.6)$$

Bukti :

Jika menggunakan (C.4) pada fungsi $G_T(\omega)$, didapat

$$|G_T(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{X_T(u)/\sqrt{2\pi}\} \{X_T(u-r)/\sqrt{2\pi}\} du \right] dr$$

Sehingga dapat ditulis

$$\frac{|G_T(\omega)|^2}{2T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \hat{R}_T(r) dr$$

dimana

$$\hat{R}_T(r) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u-r) du$$

maka

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [E\{|G_T(\omega)|^2/2T\}]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} E[\hat{R}_T(r)] dr \right\} \quad \dots\dots (C.7)$$

Dari definisi $X_T(t)$,

$$\hat{R}_T(r) = \begin{cases} \frac{1}{2T} \int_{-(T-|r|)}^T X(u) X(u-|r|) du, & |r| \leq 2T \\ 0, & |r| > 2T \end{cases}$$

Dari definisi $X_T(t)$,

$$R_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2T} \int_{-(T-|\tau|)}^T X(u) X(u-|\tau|) du, & |\tau| \leq 2T \\ 0 & |\tau| > 2T \end{cases}$$

Sehingga, untuk $|\tau| \leq 2T$

$$\begin{aligned} E[R_T(\tau)] &= \frac{1}{2T} \int_{-(T-|\tau|)}^T E[X(u) X(u-|\tau|)] du \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-(T-|\tau|)}^T R(\tau) du \\ &= R(\tau) \{1 - (|\tau|/2T)\} \end{aligned}$$

dimana $R(\tau) = E[X(t) X(t-\tau)]$.

Sehingga dari (C.7) didapatkan

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} [1 - (|\tau|/2T)] e^{-j\omega\tau} R(\tau) d\tau \right\}$$

Untuk fungsi $[1 - (|\tau|/2T)]$, bila T naik maka fungsi tersebut cenderung mempunyai nilai yang konstan, 1, untuk semua nilai τ . Sehingga, jika $R(\tau)$ menuju nol secara cukup cepat (bila $T \rightarrow \infty$) maka transformasi Fouriernya ada, yaitu

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R(\tau) d\tau \quad \dots\dots (C.9)$$

APPENDIKS D

Sifat-sifat $f(\omega)$ yang menyebabkannya disebut 'spectral density function' adalah

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 1$$

Diketahui bahwa
$$h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i r \omega} f(\omega) d\omega$$

Untuk $r=0$,

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 1$$

$$2. f(\omega) \geq 0, \text{ untuk semua } \omega.$$

Karena $|GT(\omega)|^2 \geq 0 \Rightarrow h(\omega) \geq 0 \Rightarrow f(\omega) \geq 0$ untuk semua ω .

$$3. \text{ Untuk proses yang nilainya real,}$$

$$f(-\omega) = f(\omega), \quad \text{untuk semua } \omega$$

Bukti :

$$\begin{aligned} f(-\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i r \omega} h(-r) dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i r \omega} h(r) dr \\ &= f(\omega) \end{aligned}$$

Sedang sifat-sifat $F(\omega)$ yang menyebabkannya berfungsi sebagai fungsi distribusi adalah

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, untuk semua x .

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$F(-\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x) dx = 0$$

2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

3. $F(x)$ adalah fungsi yang tidak turun untuk x .

$$x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$$

Tabel 1 Data tinggi gelombang Teluk Ratai bulan Oktober 1987.

7.296	13.908	18.24	16.416	14.2272	14.364	14.2272	14.6376	19.5168	26.8356	9.8496	15.3216
27.36	20.52	13.68	25.536	22.9824	11.97	11.97	17.0772	2.4396	19.6992	17.556	12.768
34.2	12.768	19.836	25.65	21.546	16.416	16.1424	12.198	14.9112	13.11	22.3668	14.5008
12.768	136.8	13.68	25.536	17.0772	11.4	16.9176	7.866	15.048	5.7	9.8496	10.7616
19.836	13.68	12.768	7.6608	18.7872	19.3344	21.7512	16.416	9.575999	12.312	2.4852	10.488
13.908	6.384	10.488	28.728	23.484	21.9564	12.198	9.9408	3.192	14.0904	7.387201	14.0904
8.3448	68.4	25.536	21.5232	11.97	17.1	7.387201	14.6376	16.9176	17.3964	17.2368	14.6376
68.4	20.52	5.13	17.1	21.546	12.882	14.5008	9.8496	5.1984	19.3344	102.6	7.387201
20.52	11.1264	20.52	41.04	23.94	19.3344	21.546	14.5008	10.26	10.2144	22.1616	11.856
102.6	7.296	12.768	8.3448	11.1264	23.94	17.0772	9.9408	14.0904	19.5168	14.7744	7.387201
68.4	27.36	20.52	18.24	11.1264	5.13	16.1424	12.084	9.7584	14.0904	19.5168	5.7
102.6	13.224	16.6896	23.94	15.96	9.575999	14.7744	9.393599	14.82	14.6376	12.312	16.9176
18.24	27.36	27.36	2.7816	23.94	9.576	21.9564	9.9408	16.9176	10.26	18.24	11.1264
27.36	19.152	102.6	18.24	23.94	21.546	14.0904	12.996	18.24	24.396	16.758	10.2144
14.25	15.5952	7.6608	23.94	17.0772	10.2144	18.9696	19.6992	19.6992	7.318801	14.5008	12.768
171	68.4	10.944	27.36	11.856	5.5632	16.4388	17.556	9.7584	9.918	15.3216	15.4584
102.6	5.13	11.1264	22.344	18.9696	14.2272	14.364	15.4584	18.24	12.768	9.8496	14.9112
15.96	35.91	7.6608	20.6112	13.9536	14.364	16.758	10.2144	17.0772	19.5168	9.9408	12.996
8.892	14.592	15.39	20.52	13.224	11.856	16.5984	14.2272	16.1424	7.296	8.55	12.312
102.6	20.52	8.3448	18.24	14.0904	5.5632	14.5008	11.856	17.2368	14.5008	14.7744	7.455601
8.3448	13.68	2.5536	22.1616	16.9176	21.7512	14.0904	9.8496	12.084	2.5536	14.592	8.0712
10.2144	20.52	16.5984	30.5292	16.4388	11.97	19.5168	14.7744	8.55	11.856	2.5536	14.364
4.104	25.65	12.312	21.1356	18.7872	16.53	9.667199	9.8496	12.312	11.4	10.2144	16.6896
102.6	15.5952	9.576	9.918	23.94	7.7976	14.25	8.55	10.032	18.24	19.6992	14.592
3.648	34.2	11.1264	56.43	16.9176	11.856	9.7584	9.7584	8.0712	14.7744	14.364	14.6376
15.96	34.2	13.68	8.0712	14.364	11.97	12.312	7.182	5.5632	10.2144	13.908	13.11
102.6	10.2144	14.592	25.536	9.9408	10.7616	19.3344	24.168	12.312	5.13	14.0904	10.2144
10.2144	14.592	27.36	23.94	18.9696	9.667199	24.168	12.312	19.152	14.592	19.3344	14.7744
10.944	18.24	18.24	6.612	11.742	12.312	26.5848	14.592	9.8496	12.312	16.9176	21.9564
30.78	34.2	7.6608	13.908	16.9176	13.452	14.6376	12.312	17.0772	14.7744	9.393599	18.7872
68.4	14.592	2.5536	29.184	19.3344	12.996	11.97	17.2368	22.1616	10.7616	4.8792	11.856
8.55	20.52	14.6376	13.224	19.6992	2.964	17.0772	14.9112	19.152	12.198	11.742	12.996
11.1264	10.944	12.312	12.312	10.032	7.387201	14.364	9.575999	21.7512	17.556	7.0452	8.55
34.2	25.65	7.6608	2.5536	17.3964	9.667199	19.3344	14.7744	10.2144	7.387201	9.7584	11.4
54.72	16.416	9.918	26.334	7.524	9.484799	11.97	17.2368	11.1264	9.8496	9.8496	13.11
171	15.39	14.592	22.8	16.9176	7.2504	16.4388	14.6376	9.7584	17.8752	22.1616	7.7976
136.8	17.2368	11.856	21.546	14.7744	12.084	11.97	19.6992	41.04	16.9176	9.8496	34.2
16.416	25.65	35.91	2.5536	16.758	9.575999	12.084	12.312	14.364	18.0348	10.032	14.7744
20.52	12.312	14.364	26.334	23.484	19.5168	19.5168	12.312	8.208	10.032	12.768	17.556
68.4	18.24	14.592	14.592	11.1264	7.1136	14.5008	16.53	27.36	10.7616	23.484	12.084
18.24	24.624	13.908	19.836	15.732	24.624	17.0772	10.3968	11.4	7.2504	2.3484	10.2144
34.2	25.65	18.7872	23.94	14.364	9.484799	11.97	19.5168	13.68	17.2368	2.622	14.6376
20.52	16.6896	6.84	26.0832	23.142	11.742	12.198	11.97	12.768	19.5168	17.0772	9.393599
8.3448	16.53	14.592	23.94	16.9176	9.7584	11.4	17.0772	15.39	11.1264	7.182	13.452
136.8	7.6608	6.612	5.3808	2.85	7.1136	12.198	14.7744	41.04	13.452	24.396	19.3344
20.52	13.908	19.152	16.416	9.575999	12.198	10.3968	10.7616	20.52	5.5632	11.742	12.084
11.1264	34.2	17.8752	16.6896	7.729201	9.484799	17.784	11.856	2.964	12.426	7.296	19.6992
34.2	68.4	33.516	5.1072	21.7512	9.7584	10.032	17.0772	16.416	12.312	14.6376	11.742
68.4	68.4	10.488	7.6608	14.6376	11.97	18.24	11.856	16.5984	17.3964	9.8496	10.032
16.416	10.26	7.296	23.484	14.6376	24.168	7.866	14.0904	8.892	2.5536	68.4	10.032
11.856	3.648	9.576	23.484	9.8496	21.9564	14.5008	7.7976	19.152	17.0772	12.198	13.908
34.2	10.944	21.546	23.712	12.312	11.856	12.426	11.856	19.3344	8.3448	11.97	17.0772
7.296	41.04	3.648	23.94	14.6376	15.4584	19.3344	7.318801	14.5008	7.0452	14.7744	13.908

12.312	41.04	12.426	25.65	16.416	109.44	14.592	13.11	21.546	16.416	31.4184	23.484
5.928	11.97	15.39	68.4	7.866	28.728	8.892	23.484	13.908	11.856	20.9304	12.768
12.426	11.4	14.7744	12.312	10.7616	13.68	19.6992	25.0344	54.72	23.256	39.9228	18.7872
11.1264	14.25	12.54	32.832	15.3216	25.65	6.384	19.152	14.0904	30.2328	14.592	2.5764
9.8496	14.6376	13.11	17.8752	25.65	27.36	10.032	23.484	17.1	23.94	28.1808	25.8324
14.7744	20.52	11.4	28.728	12.768	41.04	2.7816	11.742	16.758	23.712	14.82	10.944
12.996	13.908	6.384	29.184	9.918	54.72	10.2144	9.393599	8.0712	9.576	54.01319	21.546
15.3216	12.882	12.426	136.8	17.8752	68.4	16.4388	14.0904	19.152	13.9536	46.512	42.2712
14.7744	6.84	6.84	14.7744	15.96	18.24	18.7872	15.96	18.24	25.536	15.5952	17.2368
15.3216	19.6992	5.1072	16.416	10.2144	24.624	16.4388	19.6992	7.6608	16.4388	2.508	8.55
17.2368	18.0348	4.104	12.312	10.944	18.24	7.729201	68.4	11.97	23.484	19.8816	35.226
11.742	34.2	12.084	30.78	27.36	54.72	12.768	16.6896	7.296	8.55	35.226	30.2328
9.7584	41.04	9.8496	20.52	14.82	34.2	7.6608	20.52	10.7616	18.8328	7.296	24.168
19.8816	14.7744	12.768	24.624	11.856	25.65	14.7744	9.918	20.52	12.084	37.5744	16.6896
7.866	12.312	2.622	19.152	16.1424	16.53	19.152	34.2	21.1356	21.1356	35.226	32.0112
12.768	21.888	8.208	35.91	11.1264	21.888	19.6992	17.8752	11.1264	7.6608	14.25	26.334
11.97	14.7744	17.2368	20.52	12.426	54.72	17.2368	30.78	16.4388	23.484	10.7616	16.758
9.576	12.312	5.5632	41.04	13.452	46.17	15.5952	34.2	5.13	16.4388	16.416	14.6376
24.624	12.198	9.8496	24.624	16.1424	34.2	16.416	27.0864	12.312	7.6608	13.908	20.4288
7.387201	2.4624	15.3216	10.26	8.0712	41.04	16.6896	20.4288	16.2792	29.2752	22.1616	32.8776
7.387201	10.2144	19.6992	20.52	7.6608	18.24	10.944	16.53	12.312	2.5536	25.764	26.334
4.9704	20.52	14.592	10.2144	17.2368	16.416	16.758	19.95	23.256	12.312	3.648	23.484
17.2368	19.4712	9.8496	14.592	13.452	47.88	17.784	17.1	12.198	20.7936	19.836	32.8776
10.944	7.296	12.768	13.224	14.9112	41.04	13.908	13.224	8.55	23.484	37.5744	20.9304
17.3964	15.39	13.908	14.25	12.312	68.4	13.908	27.36	21.888	15.3216	34.884	11.97
14.6376	9.575599	12.882	30.78	15.3216	18.24	10.944	47.88	21.1356	12.768	42.2712	12.768
17.2368	15.3216	14.6376	14.6376	18.24	27.36	8.208	18.8328	23.484	30.5292	32.8776	14.0904
19.6992	12.312	14.82	16.416	7.6608	47.88	22.1616	43.776	23.712	56.3616	25.536	16.4388
17.556	14.592	14.364	18.24	5.5632	17.1	18.7872	36.48	19.152	39.9228	46.968	18.8328
16.53	8.892	12.312	21.888	11.742	15.39	18.7872	35.91	10.944	35.226	23.256	21.1356
10.3968	12.768	5.3808	16.6896	16.6896	32.832	17.784	68.4	6.84	28.1808	23.484	23.484
22.572	20.52	16.6896	14.6376	15.5952	16.416	16.5984	27.36	11.742	10.7616	27.36	28.1808
15.96	13.68	12.198	23.712	13.68	25.65	21.1356	13.452	54.72	42.2712	14.364	39.0336
12.084	13.452	12.312	25.65	8.3448	16.416	14.0904	16.416	14.364	18.7872	12.312	15.5952
19.5168	7.387201	17.2368	12.312	9.8496	34.2	16.5984	13.68	11.628	27.9072	3.648	18.8328
20.52	10.3056	19.6992	12.996	2.508	15.96	11.742	20.52	22.1616	33.8352	15.96	16.4388
24.624	4.788	22.8	12.312	17.0772	41.04	21.888	28.728	7.524	12.768	36.936	17.1
19.6992	9.575999	12.54	12.426	21.1356	11.4	10.3968	14.25	7.0452	12.768	27.9072	18.0348
15.3216	17.2368	54.72	20.52	13.11	10.7616	9.9408	34.2	12.312	43.5024	25.8324	39.9228
12.312	9.918	22.1616	10.944	9.575999	18.354	16.4388	36.936	32.8776	51.1632	24.168	37.5744
21.7512	12.084	8.3448	16.416	20.52	14.82	18.7872	41.04	11.742	32.8776	21.7512	47.424
41.04	19.6992	12.768	11.97	13.908	13.68	14.0904	15.96	19.6992	46.968	11.856	21.888
15.732	16.4388	27.36	12.084	8.3448	41.04	12.312	15.5952	26.334	32.8776	15.4584	25.8324
13.908	7.2504	12.198	12.768	12.882	12.312	14.0904	15.4584	11.742	28.1808	37.5744	21.546
14.9112	14.7744	47.88	13.224	11.1264	14.7744	21.1356	25.536	10.7616	23.256	40.698	33.516
9.9408	11.97	13.908	15.39	8.0712	68.4	16.4388	16.6896	37.5744	23.256	16.6896	38.304
27.36	18.24	68.4	12.54	11.742	20.52	10.3968	23.484	14.0904	23.94	14.82	25.8324
10.944	15.39	34.2	14.25	12.198	13.908	11.97	7.6608	23.484	18.7872	18.8328	20.748
20.52	25.65	25.536	12.768	16.5984	5.13	25.65	35.56799	18.7872	25.5816	18.0348	21.9564
13.68	12.768	25.65	14.7744	19.152	14.0904	10.032	15.39	25.5816	54.01319	19.6992	7.6608
19.4712	9.667199	68.4	14.82	34.2	12.768	14.0904	25.65	25.8324	46.512	35.226	21.546
16.416	15.048	16.6896	7.296	18.24	7.7976	23.256	12.54	16.4388	23.256	12.198	19.6992
17.2368	13.908	13.224	14.592	16.6896	13.908	12.996	20.52	16.9176	23.256	16.1424	25.536

37.5744	30.5292	25.536	26.8356	16.9176	29.184	13.11	15.3216	21.7512	10.3968	19.3344	14.742
11.97	21.9564	19.4712	24.168	11.97	41.04	10.7616	15.3216	13.908	54.72	16.758	15.4584
14.7744	14.7744	17.784	23.142	14.364	30.78	12.312	19.4712	10.3968	17.556	24.168	25.65
18.9696	23.484	15.5952	16.1424	14.6376	35.91	12.996	20.52	17.2368	30.78	14.0904	14.592
38.304	19.5168	23.712	14.7744	12.768	15.96	9.575999	16.4388	11.97	29.8224	11.856	17.784
21.5232	24.624	13.452	34.2	15.048	61.56	15.96	41.04	16.6896	24.624	15.3216	16.1424
25.536	24.396	18.7872	26.904	19.5168	40.128	8.3448	16.53	11.97	25.536	11.97	20.52
26.334	23.484	17.8752	21.1356	12.996	24.624	14.6376	20.52	12.084	12.312	11.97	12.882
25.764	27.0864	25.8324	24.624	10.2144	51.3	11.742	23.712	14.0904	23.712	16.758	27.36
13.11	12.312	25.536	14.5008	12.312	32.832	12.198	21.888	9.8496	14.6376	13.452	68.4
25.65	3.648	18.1944	19.152	2.7816	41.04	12.768	54.72	17.2368	32.832	19.3344	17.2368
19.6992	14.364	33.1968	13.908	11.856	29.184	9.8496	25.65	16.758	18.24	12.198	41.04
20.6112	21.888	45.144	22.9824	14.7744	32.832	11.742	28.728	11.97	22.1616	19.6992	14.592
37.5744	36.936	43.776	20.52	15.96	31.92	14.6376	30.78	14.2272	18.0348	5.5632	21.546
11.856	12.312	62.81401	14.7744	21.5232	10.488	11.742	29.184	17.8752	23.94	21.3408	25.65
40.3104	11.742	34.086	5.928	34.2	26.448	9.576	15.96	9.393599	10.7616	19.6992	26.334
23.484	19.152	33.06	19.152	28.728	32.832	17.2368	21.3408	15.3216	14.364	14.0904	23.94
11.1264	19.836	32.832	14.25	18.24	41.04	12.312	15.96	14.7744	18.24	16.4388	21.888
20.9304	23.94	26.5848	24.624	15.3216	25.536	20.52	21.7512	16.1424	32.0112	11.628	21.888
30.8256	12.312	30.78	12.084	15.4584	34.2	24.624	23.484	4.9248	19.836	12.312	41.04
18.24	13.908	41.04	19.6992	14.0904	28.728	14.7744	25.65	11.742	14.592	12.312	14.7744
20.52	14.364	20.52	16.53	21.7512	22.344	9.393599	25.65	12.768	16.4388	10.7616	32.832
24.624	26.5848	18.24	19.152	14.82	16.6896	14.364	18.1944	12.768	15.3216	21.1356	18.7872
10.944	19.5168	9.7584	12.312	28.728	18.24	5.1984	23.94	14.7744	30.8256	7.455601	21.888
45.486	9.576	47.424	16.758	21.888	15.39	10.7616	8.3448	15.3216	18.24	12.54	19.4712
21.1356	23.94	13.224	30.78	13.68	15.96	102.6	10.3056	4.788	19.152	12.084	14.9112
4.6968	26.334	36.48	24.168	41.04	19.152	14.6376	15.39	15.3216	22.9824	12.312	25.65
28.4544	14.7744	11.4	24.396	36.48	24.624	14.25	13.908	7.6608	13.452	14.6376	15.3216
10.2144	17.0772	35.112	18.24	36.366	13.452	14.5008	6.612	15.3216	12.768	5.13	14.7744
10.7616	16.9176	16.6896	24.624	34.2	7.296	41.04	24.168	12.084	16.9176	13.11	16.416
21.1356	14.5008	19.6992	20.064	51.3	2.964	34.2	13.908	14.82	17.556	12.312	30.78
13.9536	11.97	20.52	25.65	34.1544	17.2368	29.0016	15.96	12.198	14.2272	9.7584	14.25
15.3216	16.4388	16.6896	23.484	46.17	15.96	12.198	16.4388	11.97	14.0904	14.6376	29.5944
9.8496	5.1072	25.65	10.944	6.384	10.944	41.04	11.856	10.2144	16.758	10.944	16.4388
11.742	16.5984	23.94	18.24	36.48	12.312	5.5632	14.82	11.856	21.7512	19.5168	14.592
23.484	19.3344	68.4	13.68	45.144	18.24	27.36	15.3216	11.97	14.5008	8.892	17.1
24.624	12.084	25.65	12.426	28.728	14.6376	13.11	23.712	12.882	14.364	14.25	21.7512
17.3964	11.97	17.8752	12.084	29.754	21.888	30.78	18.7872	12.768	6.612	10.2144	9.918
32.8776	25.8324	16.6896	23.484	30.78	11.742	14.364	11.97	5.7	21.5232	5.1072	30.78
23.94	12.312	19.5168	12.768	43.776	20.4288	14.7744	16.4388	13.68	21.546	14.6376	25.536
17.8752	11.742	13.68	12.426	47.424	15.39	22.3668	15.048	11.1264	14.7744	19.3344	15.4584
12.768	23.712	41.04	12.312	21.888	11.856	20.52	16.6896	15.3216	16.6896	20.4288	12.312
23.712	14.2272	24.624	13.11	24.624	13.11	18.24	10.26	15.3216	11.628	13.908	21.888
21.888	16.758	18.24	3.648	15.3216	19.6992	20.7936	18.9696	11.97	11.628	12.768	20.748
38.304	19.6992	12.768	14.7744	32.832	9.393599	82.08	15.3216	41.04	12.996	9.575999	15.96
18.7872	14.364	24.624	2.4624	24.624	18.7872	10.944	16.9176	30.78	14.2272	14.5008	7.296
32.8776	24.168	16.53	16.758	16.53	8.3448	14.82	9.393599	26.5848	15.4584	10.3968	20.52
16.4388	19.152	18.9696	9.393599	32.832	12.996	21.1356	12.426	41.04	15.39	14.5008	12.198
23.94	16.758	29.184	14.592	51.3	17.8752	28.728	9.8496	12.312	17.2368	20.52	18.24
27.0864	31.122	21.888	13.908	21.888	21.9564	24.624	12.768	14.0904	16.4388	14.364	25.65
14.82	7.6608	21.3408	14.82	24.624	12.312	13.908	11.1264	11.1264	23.94	14.7744	12.996
23.484	12.426	16.758	10.3056	46.17	18.7872	41.04	14.7744	15.732	18.9696	9.8496	19.152
19.6992	24.624	25.65	14.364	29.64	21.1356	19.152	9.575999	10.26	19.152	14.2272	12.768

LAMPIRAN 3

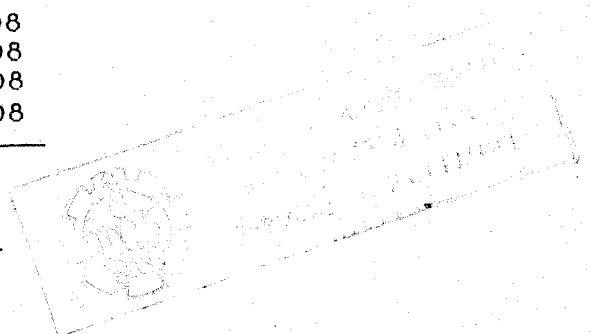
Tabel 2 Konversi nilai $\cos(2\pi h/L)$ dari periode gelombang.

Periode (p)	$\cos(2\pi h/L)$
≤ 2.3	-
2.5	15
3	6
3.5	3
4	2.25
4.5	1.8
5	1.6
5.5	1.45
6	1.4
6.5	1.3
7	1.25
7.5	1.22
8	1.18
8.5	1.15
9	1.14
10	1.13
10.5	1.12
11	1.1
11.5	1.09
12	1.08
12.5	1.08
13	1.07
13.5	1.07
14	1.06
15	1.05
16	1.04
18	1.03
19	1.03
20	1.03
21	1.03
22	1.02
23	1.02
24	1.02
≥ 25	1.02

NILAI SPEKTRUM GELOMBANG TELUK RATAI

DENGAN $M=44$, $N=2000$

frekuensi	spektrum
1. 136364E-02	1. 307983E+12
2. 272727E-02	3. 269837E+11
3. 409091E-02	1. 453166E+11
4. 545455E-02	8. 173326E+10
5. 681818E-02	5. 230322E+10
6. 818182E-02	3. 631655E+10
7. 954546E-02	2. 66771E+10
9. 090909E-02	2. 04207E+10
. 1022727	1. 613138E+10
. 1136364	1. 30632E+10
. 125	1. 07923E+10
. 1363636	9. 066556E+09
. 1477273	7. 722862E+09
. 1590909	6. 656689E+09
. 1704546	5. 796549E+09
. 1818182	5. 092595E+09
. 1931818	4. 509176E+09
. 2045455	4. 020259E+09
. 2159091	3. 606495E+09
. 2272727	3. 253229E+09
. 2386364	2. 949218E+09
. 25	2. 685315E+09
. 2613636	2. 455828E+09
. 2727273	2. 254073E+09
. 2840909	2. 076044E+09
. 2954545	1. 918157E+09
. 3068182	1. 777488E+09
. 3181818	1. 65162E+09
. 3295455	1. 538548E+09
. 3409091	1. 436593E+09
. 3522727	1. 344346E+09
. 3636364	1. 260612E+09
. 375	1. 183671E+09
. 3863636	1. 114765E+09
. 3977273	1. 051036E+09
. 4090909	9. 925448E+08
. 4204546	9. 387318E+08
. 4318182	8. 891124E+08
. 4431818	8. 432611E+08
. 4545455	8. 008055E+08
. 4659091	7. 614185E+08
. 4772727	7. 248124E+08
. 4886364	6. 907305E+08
. 5	6. 589425E+08



NILAI SPEKTRUM GELOMBANG TELUK RATAI DENGAN M=89, N=2000

frekuensi	spektrum	frekuensi	spektrum
5. 617978E-03	1. 034749E+13	. 252809	4. 983749E+09
1. 123596E-02	2. 586774E+12	. 258427	4. 764035E+09
1. 685393E-02	1. 149608E+12	. 264045	4. 558201E+09
2. 247191E-02	6. 46599E+11	. 2696629	4. 365101E+09
2. 808989E-02	4. 137773E+11	. 2752809	4. 183704E+09
3. 370787E-02	2. 873067E+11	. 2808989	4. 013084E+09
3. 932584E-02	2. 110487E+11	. 2865169	3. 852409E+09
4. 494382E-02	1. 615544E+11	. 2921348	3. 700918E+09
. 0505618	1. 276212E+11	. 2977528	3. 557924E+09
5. 617978E-02	1. 03349E+11	. 3033708	3. 422804E+09
6. 179776E-02	8. 539037E+10	. 3089888	3. 29499E+09
6. 741573E-02	7. 173136E+10	. 3146067	3. 173967E+09
7. 303371E-02	6. 110139E+10	. 3202247	3. 059258E+09
7. 865168E-02	5. 266689E+10	. 3258427	2. 950438E+09
8. 426966E-02	4. 586235E+10	. 3314607	2. 847105E+09
8. 988764E-02	4. 029334E+10	. 3370787	2. 748899E+09
9. 550562E-02	3. 567787E+10	. 3426966	2. 655489E+09
. 1011236	3. 181007E+10	. 3483146	2. 566567E+09
. 1067416	2. 853675E+10	. 3539326	2. 481846E+09
. 1123596	2. 574204E+10	. 3595506	2. 401071E+09
. 1179775	2. 333705E+10	. 3651686	2. 323999E+09
. 1235955	2. 125246E+10	. 3707865	2. 250408E+09
. 1292135	1. 943381E+10	. 3764045	2. 180089E+09
. 1348315	1. 783772E+10	. 3820225	2. 112854E+09
. 1404494	1. 642934E+10	. 3876405	2. 048524E+09
. 1460674	1. 518029E+10	. 3932584	1. 986936E+09
. 1516854	1. 406745E+10	. 3988764	1. 927935E+09
. 1573034	1. 307171E+10	. 4044944	1. 87138E+09
. 1629213	1. 21772E+10	. 4101124	1. 817136E+09
. 1685393	1. 137064E+10	. 4157303	1. 76508E+09
. 1741573	1. 064085E+10	. 4213483	1. 715096E+09
. 1797753	9. 978428E+09	. 4269663	1. 667076E+09
. 1853933	9. 375305E+09	. 4325843	1. 620918E+09
. 1910112	8. 824621E+09	. 4382023	1. 576527E+09
. 1966292	8. 320462E+09	. 4438203	1. 533815E+09
. 2022472	7. 857737E+09	. 4494382	1. 492699E+09
. 2078652	7. 43202E+09	. 4550562	1. 453099E+09
. 2134832	7. 039471E+09	. 4606742	1. 414944E+09
. 2191011	6. 676741E+09	. 4662922	1. 378163E+09
. 2247191	6. 340872E+09	. 4719101	1. 34269E+09
. 2303371	6. 029279E+09	. 4775281	1. 308467E+09
. 2359551	5. 739683E+09	. 4831461	1. 275433E+09
. 241573	5. 470064E+09	. 4887641	1. 243536E+09
. 247191	5. 218615E+09	. 494382	1. 212724E+09
		. 5	1. 18294E+09

NILAI SPEKTRUM GELOMBANG TELUK RATAI DENGAN M=100, N=500

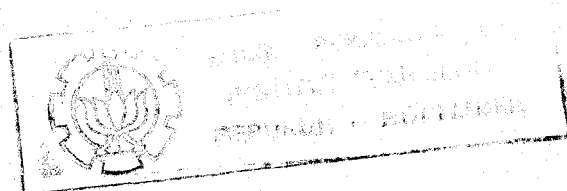
frekuensi	spektrum	frekuensi	spektrum
.005	7.701713E+11	.255	2.868482E+08
.01	1.925358E+11	.26	2.755726E+08
.015	8.556628E+10	.265	2.649294E+08
.02	4.812695E+10	.27	2.548721E+08
.025	3.079788E+10	.275	2.453588E+08
.03	2.138456E+10	.28	2.363508E+08
.035	1.570863E+10	.285	2.27813E+08
.04	1.202472E+10	.29	2.197132E+08
.045	9.499057E+09	.295	2.120221E+08
.05	7.692458E+09	.3	2.047126E+08
.055	6.355782E+09	.305	1.977598E+08
.06	5.339131E+09	.31	1.911411E+08
.065	4.547937E+09	.315	1.848353E+08
.07	3.920149E+09	.32	1.788231E+08
.075	3.413681E+09	.325	1.730865E+08
.08	2.999176E+09	.33	1.676088E+08
.085	2.655643E+09	.335	1.623749E+08
.09	2.367759E+09	.34	1.573705E+08
.095	2.124125E+09	.345	1.525824E+08
.1	1.916113E+09	.35	1.479982E+08
.105	1.737105E+09	.355	1.436066E+08
.11	1.581947E+09	.36	1.39397E+08
.115	1.446585E+09	.365	1.353595E+08
.12	1.327788E+09	.37	1.314849E+08
.125	1.22296E+09	.375	1.277644E+08
.13	1.129992E+09	.38	1.241901E+08
.135	1.047163E+09	.385	1.207545E+08
.14	9.730492E+08	.39	1.174504E+08
.145	9.064692E+08	.395	1.142712E+08
.15	8.464362E+08	.4	1.112108E+08
.155	7.921185E+08	.405	1.082633E+08
.16	7.428136E+08	.41	1.054232E+08
.165	6.979229E+08	.415	1.026854E+08
.17	6.56935E+08	.42	1.000451E+08
.175	6.194101E+08	.425	9.749768E+07
.18	5.849688E+08	.43	9.503891E+07
.185	5.532823E+08	.435	9.266468E+07
.19	5.240648E+08	.44	9.037121E+07
.195	4.970662E+08	.445	8.815486E+07
.2	4.72067E+08	.45	8.601223E+07
.205	4.488751E+08	.455	8.394009E+07
.21	4.273201E+08	.46	8.193543E+07
.215	4.072519E+08	.465	7.99954E+07
.22	3.885363E+08	.47	7.81172E+07
.225	3.710551E+08	.475	7.629824E+07
.23	3.547015E+08	.48	7.45361E+07
.235	3.393811E+08	.485	7.282843E+07
.24	3.250083E+08	.49	7.117305E+07
.245	3.115068E+08	.495	6.956784E+07
.25	2.988077E+08	.5	6.80108E+07

NILAI SPEKTRUM GELOMBANG TELUK RATAI DENGAN M=249, N=500

frekuensi	spektrum	frekuensi	spektrum
2. 008032E-03	8. 375205E+12	9. 437751E-02	3. 725716E+09
4. 016064E-03	2. 093702E+12	9. 638554E-02	3. 565148E+09
6. 024096E-03	9. 304744E+11	9. 839358E-02	3. 422558E+09
8. 032128E-03	5. 233501E+11	. 1004016	3. 280359E+09
1. 004016E-02	3. 349122E+11	. 1024096	3. 154367E+09
1. 204819E-02	2. 32552E+11	. 1044177	3. 027804E+09
1. 405623E-02	1. 708325E+11	. 1064257	2. 915963E+09
1. 606426E-02	1. 30775E+11	. 1084337	2. 802801E+09
1. 807229E-02	1. 03312E+11	. 1104418	2. 703099E+09
2. 008032E-02	8. 36682E+10	. 1124498	2. 601479E+09
2. 208835E-02	6. 913409E+10	. 1144578	2. 512256E+09
2. 409639E-02	5. 807982E+10	. 1164659	2. 420633E+09
2. 610442E-02	4. 947716E+10	. 1184739	2. 34049E+09
2. 811245E-02	4. 265127E+10	. 1204819	2. 257581E+09
3. 012048E-02	3. 714458E+10	. 12249	2. 185345E+09
3. 212851E-02	3. 263781E+10	. 124498	2. 110058E+09
3. 413655E-02	2. 89027E+10	. 126506	2. 044752E+09
3. 614458E-02	2. 577273E+10	. 1285141	1. 976158E+09
3. 815261E-02	2. 312388E+10	. 1305221	1. 916936E+09
4. 016064E-02	2. 086234E+10	. 1325301	1. 854256E+09
4. 216868E-02	1. 891616E+10	. 1345382	1. 800401E+09
4. 417671E-02	1. 72293E+10	. 1365462	1. 742956E+09
4. 618474E-02	1. 575767E+10	. 1385542	1. 693861E+09
4. 819277E-02	1. 446615E+10	. 1405623	1. 64107E+09
5. 020081E-02	1. 333465E+10	. 1425703	1. 5962E+09
5. 220884E-02	1. 231582E+10	. 1445783	1. 547564E+09
5. 421687E-02	1. 142291E+10	. 1465863	1. 506464E+09
. 0562249	1. 060965E+10	. 1485944	1. 461543E+09
5. 823294E-02	9. 892881E+09	. 1506024	1. 423814E+09
6. 024096E-02	9. 233234E+09	. 1526104	1. 382233E+09
. 062249	8. 649332E+09	. 1546185	1. 347525E+09
6. 425703E-02	8. 106766E+09	. 1566265	1. 308951E+09
6. 626506E-02	7. 624955E+09	. 1586345	1. 276966E+09
6. 827309E-02	7. 173214E+09	. 1606426	1. 241104E+09
7. 028113E-02	6. 771124E+09	. 1626506	1. 211571E+09
7. 228916E-02	6. 39091E+09	. 1646586	1. 178169E+09
7. 429719E-02	6. 051987E+09	. 1666667	1. 150852E+09
7. 630522E-02	5. 728873E+09	. 1686747	1. 119681E+09
7. 831326E-02	5. 440621E+09	. 1706827	1. 094376E+09
8. 032128E-02	5. 163652E+09	. 1726908	1. 065234E+09
8. 232932E-02	4. 916528E+09	. 1746988	1. 041755E+09
8. 433734E-02	4. 677258E+09	. 1767068	1. 014464E+09
8. 634538E-02	4. 463855E+09	. 1787149	9. 926464E+08
8. 835341E-02	4. 255681E+09	. 1807229	9. 670476E+08
9. 036144E-02	4. 070194E+09	. 1827309	9. 467478E+08
9. 236948E-02	3. 887906E+09	. 184739	9. 226963E+08

frekuensi	spektrum
. 186747	9. 03782E+08
. 188755	8. 811532E+08
. 1907631	8. 635071E+08
. 1927711	8. 421855E+08
. 1947791	8. 257046E+08
. 1967872	8. 055855E+08
. 1987952	7. 901748E+08
. 2008032	7. 711666E+08
. 2028112	7. 567406E+08
. 2048193	7. 387585E+08
. 2068273	7. 252405E+08
. 2088353	7. 082088E+08
. 2108434	6. 955288E+08
. 2128514	6. 793782E+08
. 2148595	6. 674735E+08
. 2168675	6. 521406E+08
. 2188755	6. 409542E+08
. 2208835	6. 263818E+08
. 2228916	6. 158606E+08
. 2248996	6. 019963E+08
. 2269076	5. 920938E+08
. 2289157	5. 788892E+08
. 2309237	5. 695613E+08
. 2329317	5. 569736E+08
. 2349398	5. 481801E+08
. 2369478	5. 361686E+08
. 2389558	5. 278736E+08
. 2409639	5. 164015E+08
. 2429719	5. 085713E+08
. 2449799	4. 976046E+08
. 246988	4. 902082E+08
. 248996	4. 797157E+08
. 251004	4. 727255E+08
. 2530121	4. 626778E+08
. 2550201	4. 560675E+08
. 2570281	4. 464388E+08
. 2590362	4. 401838E+08
. 2610442	4. 309489E+08
. 2630522	4. 250281E+08
. 2650603	4. 161638E+08
. 2670683	4. 10556E+08
. 2690763	4. 02042E+08
. 2710844	3. 96728E+08
. 2730924	3. 885441E+08
. 2751004	3. 835068E+08
. 2771084	3. 756348E+08
. 2791165	3. 708574E+08
. 2811245	3. 632804E+08
. 2831325	3. 587482E+08
. 2851406	3. 514503E+08

frekuensi	spektrum
. 2871486	3. 471487E+08
. 2891566	3. 401154E+08
. 2911647	3. 360314E+08
. 2931727	3. 292488E+08
. 2951807	3. 253707E+08
. 2971888	3. 188254E+08
. 2991968	3. 151413E+08
. 3012048	3. 08822E+08
. 3032129	3. 053212E+08
. 3052209	2. 992165E+08
. 3072289	2. 958894E+08
. 309237	2. 899883E+08
. 311245	2. 868255E+08
. 313253	2. 811185E+08
. 315261	2. 781113E+08
. 3172691	2. 725888E+08
. 3192771	2. 697291E+08
. 3212851	2. 643828E+08
. 3232932	2. 616626E+08
. 3253012	2. 564842E+08
. 3273093	2. 538967E+08
. 3293173	2. 488784E+08
. 3313253	2. 464169E+08
. 3333334	2. 415512E+08
. 3353414	2. 392093E+08
. 3373494	2. 344898E+08
. 3393574	2. 322616E+08
. 3413655	2. 276816E+08
. 3433735	2. 255614E+08
. 3453815	2. 21115E+08
. 3473896	2. 190975E+08
. 3493976	2. 147788E+08
. 3514056	2. 128593E+08
. 3534137	2. 086628E+08
. 3554217	2. 068365E+08
. 3574297	2. 027572E+08
. 3594378	2. 010197E+08
. 3614458	1. 970527E+08
. 3634538	1. 953999E+08
. 3654619	1. 915406E+08
. 3674699	1. 899685E+08
. 3694779	1. 862126E+08
. 371486	1. 847175E+08
. 373494	1. 810607E+08
. 375502	1. 796392E+08
. 3775101	1. 760777E+08
. 3795181	1. 747264E+08
. 3815261	1. 712565E+08
. 3835341	1. 699723E+08
. 3855422	1. 665904E+08



frekuensi	spektrum
. 3875502	1. 653702E+08
. 3895582	1. 620731E+08
. 3915663	1. 602141E+08
. 3935743	1. 576986E+08
. 3955823	1. 565983E+08
. 3975904	1. 53461E+08
. 3995984	1. 524168E+08
. 4016065	1. 493551E+08
. 4036145	1. 483646E+08
. 4056225	1. 453757E+08
. 4076305	1. 444366E+08
. 4096386	1. 415178E+08
. 4116466	1. 40628E+08
. 4136546	1. 37777E+08
. 4156627	1. 369341E+08
. 4176707	1. 341485E+08
. 4196787	1. 333509E+08
. 4216868	1. 306281E+08
. 4236948	1. 298739E+08
. 4257028	1. 272122E+08
. 4277109	1. 264994E+08
. 4297189	1. 238963E+08
. 4317269	1. 232235E+08
. 433735	1. 206772E+08
. 435743	1. 200426E+08
. 437751	1. 175513E+08
. 4397591	1. 169533E+08
. 4417671	1. 14515E+08
. 4437751	1. 139525E+08
. 4457832	1. 115654E+08
. 4477912	1. 110368E+08
. 4497992	1. 086995E+08
. 4518073	1. 082032E+08
. 4538153	1. 05914E+08
. 4558233	1. 054491E+08
. 4578313	1. 032065E+08
. 4598394	1. 027715E+08
. 4618474	1. 00574E+08
. 4638554	1. 00168E+08
. 4658635	9. 801414E+07
. 4678715	9. 763594E+07
. 4698795	9. 552443E+07
. 4718876	9. 517291E+07
. 4738956	9. 310248E+07
. 4759036	9. 277674E+07
. 4779117	9. 074606E+07
. 4799197	9. 044506E+07
. 4819277	8. 845305E+07
. 4839358	8. 817586E+07

frekuensi	spektrum
. 4859438	8. 622135E+07
. 4879518	8. 596714E+07
. 4899599	8. 404895E+07
. 4919679	8. 381683E+07
. 4939759	8. 1934E+07
. 495984	8. 172314E+07
. 497992	7. 987458E+07
. 5	7. 968426E+07